



Title	1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures 北海道大学理学部数学教室
Author(s)	Arai, A.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 18, 1
Issue Date	1990-01-01
DOI	10.14943/5137
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/5452">http://hdl.handle.net/2115/5452</a> ; <a href="http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1279/">http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1279/</a>
Type	bulletin (article)
File Information	18.pdf



[Instructions for use](#)

1989年度談話会アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

**Edited by A. Arai**

**Series # 18. June, 1990**

**HOKKAIDO UNIVERSITY**  
**TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS**

- # 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- # 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- # 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- # 4: J. Tilouine, Kummer's criterion over  $\Lambda$  and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- # 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- # 6: T. Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- # 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- # 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- # 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- # 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
- # 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- # 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), “特異点論とその応用” 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium “Singularity Theory and its Applications,” 317 pages. 1989.
- # 13: M. Suzuki, “駆け足で有限群を見てみよう” 1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- # 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989.
- # 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- # 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. I, 258 pages. 1990.
- # 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. II, 235 pages. 1990.

# 1989年度 談話会アブストラクト

		ページ
1 姜 伯駒	Fixed point theory for surface maps	1
2 川又雄二郎	代数多様体の極小モデルとは何か	2
3 殷 慰萍	Some Remarks on the Poisson Kernels	3
4 稲葉 尚志	横断的な方向に幾何構造をもった余次元1葉層について	5
5 J. Zajac	Distortion function and boundary value problem for quasiconformal mapping	7
6 P. Aviles	On the Yamabe Problem	17
7 石井 仁司	Oblique 問題について	28
8 小沢 哲也	Quantization of a Poisson algebra and polynomials associated to links	30
9 土井 公二	素数の分布について	31
10 真島 秀行	微分方程式の解析的分類と不変量	33
11 R. Gérard	Local Weierstraß theory in an asymptotic case	40
12 梅村 浩	Lie-Drach-Vessiot 理論について	42
13 飛田 武幸	ホワイトノイズと回転群	45
14 堤 誉志雄	Blow-up of $H^1$ Solutions for the Nonlinear Schrödinger Equation	47
15 青木 秀夫	高温超伝導の電子メカニズム	50
16 前田 吉昭	Gauge orbit に対する平均曲率	51
17 中居 功	The structure of non isolated singularities of morphisms	53
18 中井 三留	Royden Compactifications of Riemannian Manifolds	55
19 鈴木 寛	t-design 構成の現状	57
20 曾我日出夫	弾性方程式の散乱核について	61
21 原田 学	Almost relative projectives と中山環	63
22 W. Casselman	On the cohomology of arithmetic groups	65
23 西村 尚史	分岐図式の位相型に対する代数的公式	67
24 大和 健二	シンプレクティック構造についての1つの話題	69
25 H. Amann	Quasilinear Reaction-Diffusion Systems	71
26 R. Rautmann	On Tests for Stability	72

# Fixed point theory for surface maps.

Boju Jiang

Abstract of a talk at Hokkaido Univ.

Dimension 2 is a special dimension in fixed point theory. For self-maps of compact manifolds of other dimensions, the Nielsen fixed point theory gives us the best lower bound for the number of fixed points in the homotopy class, while counter-examples exist on surfaces.

After brief introduction to Lefschetz and Nielsen fixed point theory, the special difficulty in dimension 2 is discussed, as a typical phenomenon in low dimensional topology. Braids are used to convert the problem into an algebraic one. Some ad hoc examples are exhibited. A general consideration using commutator analysis shows that in dimension 2 the classical Nielsen theory invariants are only the first obstructions.

(談話会) 川又雄二郎

3次元代数多様体の極小モデルの存在定理の証明  
が最近完成した: 任意の  $\mathbb{C}$  上の  $\underbrace{\text{代数多様体}}_{\text{3次元}}$  に対して

それと双有理同値な  $\underbrace{X}_{\text{射影多様体}}$  で次の条件を満たすものが存在する

- (1)  $X$  は高々  $\mathbb{Q}$ -分解的末端特異点のみをもつ
- (2)  $K_X$  は数値的に  $\leq$  非負となるか、又は 2次元以下の射影多様体  $Y$  への全射正則写像  $f: X \rightarrow Y$  で  $-K_X$  が  $f$ -豊富かつ  $\rho(X/Y) = 1$  となる。

この講演では この定理の意味, 応用 および 関連する未解決問題などについて述べてみたい。

# Some Remarks on the Poisson Kernels

By Weiping Yin

## I. Poisson Kernel is Annihilated by an Invariant Differential Operator which is Different From the Laplace - Beltrami Operator

If  $D$  is a bounded homogeneous domains in  $\mathbb{C}^n$ ,  $\Delta$  - the Laplace - Beltrami operator with Bergman metric,  $P(z, u)$  - the Poisson kernel of  $D$ . It is well known that  $\Delta P(z, u) = 0$  iff  $D$  is symmetric. But for the non-symmetric homogeneous domains, we can find an invariant differential operator (different from the Laplace - Beltrami operator) such that the Poisson kernel is annihilated by this operator.

For example, let

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \mid X > 0, x_{ij} \in \mathbb{R} \right\}, D(V) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{12} & z_{22} & 0 \\ z_{13} & 0 & z_{33} \end{pmatrix} \mid I_{\mathbb{H}} Z \in V \right\}$$

Then domain  $D(V)$  is a non-symmetric homogeneous domain in  $\mathbb{C}^3$ .

The Poisson kernel of  $D(V)$  is

$$P_*(Z, U) = \frac{|\bar{z}_{22} - u_{22}| |\bar{z}_{33} - u_{33}| \det(Z - \bar{Z})^2}{|\det(Z - U)|^4 (\bar{z}_{22} - \bar{z}_{22})^2 (\bar{z}_{33} - \bar{z}_{33})^2}$$

$$\text{and } \Delta^* = a(z) \left[ \frac{\bar{z}_{11} - \bar{z}_{11}}{2i} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{11} \partial z_{11}} + \frac{\bar{z}_{22} - \bar{z}_{22}}{8i} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{22} \partial z_{22}} + \frac{\bar{z}_{12} - \bar{z}_{12}}{4i} \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{11} \partial z_{12}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{12} \partial z_{11}} \right) + \frac{\bar{z}_{13} - \bar{z}_{13}}{4i} \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{11} \partial z_{13}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_{13} \partial z_{11}} \right) \right],$$

$$\text{where } a(z) = \frac{\bar{z}_{11} - \bar{z}_{11}}{2i} - \frac{|\bar{z}_{12} - \bar{z}_{12}|^2}{2i(\bar{z}_{22} - \bar{z}_{22})} - \frac{(\bar{z}_{13} - \bar{z}_{13})^2}{2i(\bar{z}_{33} - \bar{z}_{33})},$$

is an invariant differential operator. But we have

$$\Delta^* P_*(Z, U) = 0, \quad \text{for } Z \in D(V), U \in \text{Silov boundary of } D(V)$$

## II. The Characterizations of Bounded Symmetric Domains By Means of the Poisson Kernels

Let  $D$  be the bounded homogeneous domain in  $\mathbb{C}^n$ ,  $T(z, \bar{z})$  the Bergman metric matrix,  $P(z, u)$  Poisson kernel of  $D$ . and let

$$P_j = [P(z, u)]^{1/j} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$L(u) = T^{-1}(z, \bar{z}) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right),$$

then we have

1.  $L_j(u) = \{\text{the sum of all principle minors of degree } j \text{ for } L(u)\}$   
is the invariant differential operator under the group  $\text{Aut}(D)$ ,
2.  $L_j(P_j) = 0$  iff  $D$  is symmetric for any fixed  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ )

## III. Poisson Kernels on the Exceptional Cartan Domains

For the exceptional Cartan domains of dimension 16 and 27. We obtain the Bergman kernels, Cauchy kernels and Poisson kernels for them.



横断的な方向に幾何構造をもった  
余次元1葉層について

千葉大・教養 稲葉尚志

余次元1葉層の定性理論（葉が他の葉に巻き付く事子を言同べるこ）は、'80年代前半までに 西森, 土屋, Hector, Cantwell-Conlonらによって非常によく整備された。現在では, 例外葉 (exceptional leaf) 及び 弾性葉 (resilient leaf) の構造の解明のみが, 難解士の故に残されているという状況になっている。例外葉とは, 横断的曲線によって, その閉包を切ると Cantor 集合になる葉のことであり, 弾性葉とは, 自身のホロミーで自分自身を巻き込む葉のことである。

これらの構造に立ち入るには, 今迄の手法だけでは限界があり, 新しい見地の開拓が強く望まれる。私としては, それを次のような候補の中から模索中である。

- 方法1. トポロジー外から強力な道具を導入する。—— 例えば  $C^*$ -代数, 微分幾何などから。
- 方法2. (楽観的) 予想を立て, それの解決に努力する。—— 例えば, 例外極小集合のマルコフ性。
- 方法3. 制限された(或いは今迄とは異なった)葉層の族の中で考える。  
—— transversely geometric foliations, transversely PL foliations.

今日の話は, 方法3に相当しますが, 残念ながら現時点では, まだ足場固めの段階にしか至っていません。

定義.  $C^0$ 多様体  $X$  にリー群  $G$  が効果的, 推移的,  $C^0$  に作用する時, 対  $(G, X)$  を 幾何 (geometry) という (Thurston).

葉層  $\mathcal{F}$  の, 横断的方向の局所モデルが幾何であるとき,  $\mathcal{F}$  は transversely geometric という。

1次元の幾何は、ユークリッド、アフィン、射影幾何の3通りに限られる(Lie)ので、それに応じて余次元1の transversely geometric 葉層は、transversely euclidean, transversely affine, transversely projective の3種である。

一般に、 $M$ 上に transversely geometric 葉層  $\mathcal{F}$ があると、ホロミー表現  $H_{\mathcal{F}}: \pi_1(M) \rightarrow G$  が定まる。その像  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  を  $\mathcal{F}$  の 大域ホロミー群 と言う。 $\pi_1(M)$  や  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  の代数的性質から、例外葉や弾性葉に関する情報が、どの程度得られるかについて、以下のような結果を得た。

### 例外葉について

Example (Hector, I) 閉3多様体上の transversely affine 葉層で、例外葉をもつものがある。

Theorem (Levitt, 松元-I)  $\mathcal{F}$  を閉多様体  $M$  上の transversely projective 葉層とすると、 $\mathcal{F}$  が例外葉をもつ  $\Rightarrow \pi_1(M) \supset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

### 弾性葉について

Theorem (I)  $\mathcal{F}$  を閉多様体上の transversely affine 葉層とすると、  
 $\Gamma_{\mathcal{F}}: \text{non abel} \iff \mathcal{F}$  は弾性葉をもつ。

Theorem (松元-I)  $\mathcal{F}$  を閉多様体上の transversely projective 葉層とすると、  
 $\Gamma_{\mathcal{F}}: \text{non solvable} \Rightarrow \mathcal{F}$  は弾性葉をもつ。

Example (松元-I) ある閉3多様体上の transversely projective 葉層  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  で次を満たすものがある。

- 1)  $H_{\mathcal{F}_1} = H_{\mathcal{F}_2}$
- 2)  $\mathcal{F}_1$  は弾性葉をもち、 $\mathcal{F}_2$  はもたない。

## Lecture

### Distortion function and boundary values problem for quasiconformal mappings

by  
J. Zojć

It is well known that a  $K$ -quasiconformal mapping ( $K$ -qc) of a Jordan domain  $G$  onto another Jordan domain  $G'$  can be extended as a homeomorphism of their closures. Then we may say that a  $K$ -qc mapping of a Jordan domain  $G$  onto another Jordan domain  $G'$  has homeomorphic extension of their closures which generates a sense-preserving homeomorphism of the boundary  $G$  onto the boundary  $G'$ .

In view of invariance of quasiconformal mappings under composition with conformal mappings the boundary correspondence problem for planar qc mappings i.e. the problem of characterizing the induced homeomorphism of  $\text{fr } G$  onto  $\text{fr } G'$  can be reduced, after suitable conformal mappings to the case  $G = G' = H = \{z : \text{Im } z > 0\}$  and admits in this particular case a very simple and elegant solution. Then the boundary correspondence is determined by a monotone continuous function  $f$  in this sense that it maps  $(x, 0)$  onto  $(f(x), 0)$ , where  $f = F|_{\mathbb{R}}$ , but  $F$  is an  $K$ -qc automorphism of  $H$ . It is sufficient to consider the case where  $f$  is strictly increasing function which satisfies  $f(-\infty) = -\infty$ ,  $f(+\infty) = +\infty$ . According to Beurling and Ahlfors [2],  $f$  can be extended to an automorphism of  $\partial H$  which is  $K$ -qc in  $H$ , if and only if there exists a constant  $g = g(K)$  such that

$$(1) \quad \frac{1}{g} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq g$$

for all  $x, t \geq 0$ .

The function  $f$  which satisfies (1) is referred to be  $g$ -quasisymmetric function, which term is due to Kellogg [4].

Because of Mori's distortion theorem [4] the function  $g = g(k) = \exp(-\pi k)$ .

Then we may consider a class of real functions which are continuous and strictly increasing functions satisfying the condition (1) without any connections with quasiconformal mappings (see [5]). It has been proved by J. Väisälä that the problem of existence of a boundary extension for all qc mappings  $F: G \rightarrow G'$  between  $n$ -dimensional Jordan domains, when they are quasiconformally equivalent to the unit ball  $B^n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . But unlike to the planar case, even a Jordan domain  $G \subset \mathbb{R}^n$  homeomorphic to the unit ball  $B^n$  is not necessarily quasiconformally equivalent to  $B^n$  when  $n \geq 3$ . Some examples of quasiconformal mappings without boundary extensions for Jordan domains were obtained by Kuwalo (private communication).

The necessity of the condition (1) was obtained by considering the modules of quadrilaterals arising from  $H$  by distinguishing four points on the boundary, where one is at the infinity. There are, however, two one-parameter configurations involving point on the boundary, the quadrilateral and a punctured Jordan domain with two distinguished points on the boundary curve, cf. [2], p. 70. Therefore we may expect that the boundary correspondence generated by qc automorphism with one fixed interior point may be described in terms of characteristic conformal invariant of the latter configuration which is the harmonic measure. This is quite natural when the problem of the boundary values is considered for unit disc. Let us note that in the case of the upper half-plane we can make any point  $z_0 \in H$  a fixed point of the qc extension without changing the boundary correspondence. This can be done by composing  $F$  with a suitable affine mapping  $g(w) = aw + b\bar{w}$ ,  $a+b=1$ ,  $|a| > |b|$  of  $H$ , that keeps the points of  $\mathbb{R}$  unchanged.

## Different definitions of quasisymmetric functions.

If we start from the definition of  $g$ -quasisymmetric function obtained by Beurling and Ahlfors in 1956 but without the name - which was introduced by Kellogg in 1965), then we have

### Definition (B-A)

A strictly increasing continuous function  $f$  mapping the real line onto itself is said to be  $g$ -qs, if  $1 \leq g' < \infty$   
 $g = \inf g'$ , if

$$(1') \quad \frac{1}{g'} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq g'$$

holds for all  $x, t > 0$ ,  $g$ -qs. dilatation

This class of functions can also be characterized by certain compactness property (see [2]).

The properties of quasisymmetric functions parallel rather closely those of quasiconformal mappings. However, they have some shortcomings not shared by quasiconformal mappings. But the importance of quasisymmetric functions to the theory of quasiconformal mappings can not be overstated. We may think of them as of 1-dimensional qc mappings. (for the properties see [4]).

Another definition of qs functions was stated by K.P. Goldberg [3] in 1974. He show that (B-A) condition is really a generalization of convexity-concavity condition, and that we can weaken the assumptions in the definition of quasisymmetry significantly without altering the class of such functions. Then he use this to prove that the class of qs functions is closed under the formation of sums, appropriate products, compositions,

This Goldberg's definition can be stated as follows

Definition (G)

Let  $f$  be nonconstant function defined on  $\mathbb{R}$ . Then  $f$  is  $\lambda$ -qs on  $\mathbb{R}$  if and only if

(i)  $f$  is linear,

or

(ii) there exist some  $\lambda'$ ,  $\frac{1}{2} < \lambda' < 1$  such that

$$(2) \quad \lambda' f(x_1) + (1-\lambda') f(x_2) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq (1-\lambda') f(x_1) + \lambda' f(x_2)$$

holds for all  $x_1, x_2$ ,  $x_1 < x_2$  (finite) with  $\lambda = \inf \lambda'$ . This new number  $\lambda$  we call midpoint dilatation.

Using another conformal invariant which is harmonic measure of an open subarc of  $\text{fr} \Delta$ , Krzyż [5] (1986) gives a definition of qs for the unit circle. If  $\text{fr} \Delta$  denote the boundary of the unit disc  $\Delta$  and if  $f$  is an automorphism of  $\text{fr} \Delta$ , i.e. a sense-preserving homeomorphism of  $\text{fr} \Delta$  onto itself. If  $\alpha$  is an open subarc of  $\text{fr} \Delta$ , then  $|\alpha|$  will stand for the harmonic measure  $\omega(0, \alpha; \Delta)$ .

Definition (K)

We say that  $f$  is qs on  $\text{fr} \Delta$  if and only if there exists a constant  $M$  such that for any pair  $\alpha_1, \alpha_2$  of disjoint adjacent open subarcs of  $\text{fr} \Delta$  with equal measure  $|\alpha_1| = |\alpha_2|$  we have

$$(3) \quad |f(\alpha_1)| / |f(\alpha_2)| \leq M$$

with  $M \geq 1$ .

As an application of this new characterization of quasimetric functions for unit circle he has obtained a new characterization of quasicircles in terms of harmonic measure.

In 1968 S. Agard and J. Kellogg<sup>[1]</sup> introduced another, but quite complicated definition of quasimetric to build up a parametrical representation of qs functions.

If we denote by  $C(0,1,\infty)$  the extended  $z$ -plane minus the three points  $0, 1, \infty$  and by  $z = z(w)$  we denote the familiar elliptic modular function, which maps the upper half-plane  $H$  onto  $C(0,1,\infty)$  then the hyperbolic density  $g(z)$  in  $C(0,1,\infty)$  is invariantly defined by the relation

$$g(z)|dz| = |dw|/Im w.$$

The hyperbolic distance in  $C(0,1,\infty)$  is then defined as

$$g(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} g(z)|dz|$$

where the infimum is taken over all arcs  $\gamma$  joining  $z_1$  and  $z_2$  in  $C(0,1,\infty)$  for which the integral has meaning.

Suppose now that  $u = f(x)$  is a sense-preserving automorphism of the real line. Let  $x_1 < x_2 < x_3$  and  $u_i = f(x_i)$ ,  $i=1,2,3$ . Set

$$a = (\infty, x_1, x_2, x_3) = - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1},$$

$$a' = (\infty, u_1, u_2, u_3) = - \frac{u_3 - u_2}{u_2 - u_1}.$$

Given  $k' \geq 1$ , we say that  $K'$  is admissible for  $f$  if

$$(4) \quad -\log K' \leq \int_a^{a'} g(x) dx \leq \log K',$$

for all  $x_1 < x_2 < x_3$  but  $K = \inf K'$  - max. dilatation of  $f$ .

Since  $a$  and  $a'$  are negative, and since the negative real axis is a geodesic line for the hyperbolic density in  $C(0, 1 \infty)$ , condition (4) is equivalent to

$$(5) \quad \delta(a, a') \leq \log K.$$

It is easy to show that

$$\delta(a, a') = \left| \log \frac{\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-a'}}\right)}{\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)} \right|$$

where  $\mu(r)$ ,  $0 < r < 1$ , denotes as usual conformal modulus of the unit disc  $\Delta$  slit along the real axis from 0 to  $r$ . This function  $\mu$  is a continuous, strictly decreasing function with limits  $\infty$  at 0 and 0 at 1 respectively.

#### Definition (A-K)

A strictly increasing, continuous function  $f$  mapping the real line onto itself is said to be  $K$ -qs, if there exists  $K', K' \geq 1$   $K = \inf K'$ , if it satisfies the condition (5) for all  $x_1 < x_2 < x_3$ .

This definition brings us some advantages, however it is not easy to work with it.

When using another conformal invariant, which is a modified cross-ratio, we introduce a new characterization of quasimetry sharing all the group properties, like in the case of quasiconformal mappings. Let us note that the form of (1) indicates that the difficulty with (B-A) definition is requirement that  $(x_3 - x_2)/(x_2 - x_1) = 1$ . This observation that cross-ratios of this type are certain cross-ratio leads us to new definition of quasimetry which is good for  $H$  and for  $\Delta$  as well.



### The main result

Suppose now that  $x_1, x_2, x_3, x_4$  are points of the real line  $\mathbb{R}$  or the unit circle  $c = \partial\Delta$ , which are positively ordered. Then, consider the expression:

$$(6) \quad [x_1, x_2, x_3, x_4] = \{[(x_3 - x_2)/(x_3 - x_1)] : [(x_4 - x_2)/(x_4 - x_1)]\}^{\frac{1}{2}}.$$

THEOREM 1. The expression defined by (6) is invariant under a homography and its values range over  $(0, 1)$  for each group of four positively oriented points  $x_1, x_2, x_3, x_4$  from the real line or the unit circle.

Proof. When using the well-known decomposition of a homography, we can easily see that it is invariant under a homography in both of the cases considered above. As for the second part of the proof, we may confine ourselves to the case of real and positively ordered  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Then there exists a homography of the upper half-plane onto itself such that these points go onto  $x'_1, x'_2, x'_3, \infty$ . Since

$$(7) \quad (x_3 - x_2)/(x_3 - x_1) : [(x_4 - x_2)/(x_4 - x_1)] = [(x'_3 - x'_2)/(x'_3 - x'_1)],$$

we can see that the values of the last expression belong to the interval  $(0, 1)$ , which completes the proof.

In view of the invariance of  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$  with respect to a homography, we may replace the disc by the upper half-plane and, without any loss of generality, confine ourselves to the case of this half-plane. Then the boundary correspondence is determined by a strictly increasing continuous function  $f$ . Thus we can prove

THEOREM 2. Suppose that  $F$  is a  $K$ -quasiconformal self-mapping of the upper half-plane onto itself, which preserves the point

at infinity and whose boundary function is denoted by  $f$ . Then, for each group of four positively oriented points  $x_1, x_2, x_3, x_4$  from the real line  $R$

$$(7) \quad \phi_{1/K}([x_1, x_2, x_3, x_4]) \leq [f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)] \\ \leq \phi_K([x_1, x_2, x_3, x_4]),$$

where  $\phi_K(t)$  is the distortion function on the interval  $(0, 1)$  defined as  $\phi_K(t) = \mu^{-1}(\frac{1}{K}\mu(t))$ . The function  $\mu(t)$  denotes, as usual, the conformal modulus of the unit disc slit along the real line from 0 to  $t$  and is strictly decreasing with the limits  $\infty$  and 0 at 0 and 1, respectively.

Proof. Let  $F$  be a  $K$ -quasiconformal mapping of the upper half-plane, which preserves the point at infinity and let  $-\infty < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq \infty$  be the given four points of the real line. Then the upper half-plane together with these four points form a quadrilateral  $D = U(x_1, x_2, x_3, x_4)$  with  $a$ -sides as  $\langle x_1, x_2 \rangle$  and  $\langle x_3, x_4 \rangle$ , mapped by  $F$  onto  $D' = U(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))$ . By the definition of  $K$ -quasiconformal mappings,

$$(8) \quad \frac{1}{K} M(D) \leq M(D') \leq KM(D),$$

where  $M(D)$  denotes the conformal modulus of the quadrilateral  $D$ . Let  $h_1$  and  $h_2$  be homographies of the upper half-plane onto itself such that  $h_1(x_4) = h_2(f(x_4)) = \infty$ . Then

$$(9) \quad M(D) = M(h_1(D)) = \frac{2}{\pi} \mu([h_1(x_3) - h_1(x_2)] / [h_1(x_3) - h_1(x_1)]) \\ = \frac{2}{\pi} \mu([h_1(x_1), h_1(x_2), h_1(x_3), \infty]) = \frac{2}{\pi} \mu([x_1, x_2, x_3, x_4]),$$

and, similarly,

$$(10) \quad M(D') = \frac{2}{\pi} \mu([f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)]).$$

When introducing these expressions to (8), we have

$$(11) \quad \frac{1}{K} \mu([x_1, x_2, x_3, x_4]) \leq \mu([f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)]) \\ \leq K \mu([x_1, x_2, x_3, x_4]).$$

By composing (11) with  $\mu^{-1}$  we arrive at (7).

Now, suppose that  $f$  is a strictly increasing continuous function of the real line  $R$ , which satisfies the inequality (7) for each  $-\infty < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq \infty$ . Let us put  $x_1 = x - t$ ,  $x_2 = x$ ,  $x_3 = x + t$ ,

and  $x_4 = \infty$ ,  $t > 0$ . Then, by (6) we have

$$(12) \quad \phi_{1/K}^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 1/\sqrt{1 + [f(x) - f(x-t)]/[f(x+t) - f(x)]} \leq \phi_K^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

by which

$$\phi_K^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \leq [f(x) - f(x-t)]/[f(x+t) - f(x)] \leq \phi_{1/K}^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1.$$

Since  $\phi_K^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \lambda(K)$ , then

$$(13) \quad \frac{1}{\lambda(K)} \leq [f(x+t) - f(x)]/[f(x) - f(x-t)] \leq \lambda(K).$$

It means that  $f$  is a  $\lambda(K)$ -quasisymmetric function in the sense of Beurling and Ahlfors. Such a function can be extended to a  $K'$ -quasi-conformal mapping of the upper half-plane onto itself, where  $K'$  depends only on  $K$ .

Let us denote by  $N(K)$  the class of all continuous, strictly increasing functions  $f$  of the real line  $R$  onto itself, which satisfies the inequality (7) for each group of four positively oriented points  $x_1, x_2, x_3, x_4$  with a constant  $K > 1$ .

#### Remarks

The trivial consequence of this definition is that if:

- (a)  $f_1 \in N(K_1)$  and  $f_2 \in N(K_2)$ , then  $f_1 \circ f_2 \in N(K_1 K_2)$ ;
- (b)  $f \in N(K)$ , then  $f^{-1} \in N(K)$ ;
- (c)  $f \in N(K)$  and  $f(\infty) = \infty$ , then  $f \in N(\rho)$  with  $\rho = \lambda(K)$ ;
- (d)  $f \in N(\rho)$ , then  $f \in N(K)$ , where  $K \leq \min\{\rho^3, 2\rho - 1\}$ ;
- (e)  $f \in N(\rho)$ , then  $f^{-1} \in N(\rho')$ , where  $\rho' \leq \lambda(\min\{\rho^3, 2\rho - 1\})$ ;
- (f)  $f_1 \in N(\rho_1)$  and  $f_2 \in N(\rho_2)$ , then  $f_1 \circ f_2 \in N(\rho')$ , where  $\rho' \leq \lambda(\min\{\rho_1^3, 2\rho_1 - 1\} \cdot \min\{\rho_2^3, 2\rho_2 - 1\})$ .

Another fact is that the total collection of quasisymmetric functions remains the same under either Definition (B-A) or (7). It follows from the observation that  $K(f)$ , as the infimum of all numbers  $K$  for which (7) holds, remains finite if and only if  $\rho(f) < \infty$ . Now it is easy to note that we have other advantages which are a consequence of our definition. Some of the problems which are very important in the investigation of the class  $N(\rho)$  have trivial solutions when investigating the class  $N(K)$ . Several properties

of the function of the class  $N(K)$  are immediate consequences of the well-known properties of the distortion function  $\phi_K(t)$ . Moreover, the investigation of the class  $N(K)$  whether on the real line or on the unit discle makes no difference.

### References

- [1] AGARD, S., J.A. KELINGOS, On parametric representation for quasisymmetric functions, Mich. Math. J. (1968), 446-456.
- [2] BEURLING, A., L.V. AHLFORS, The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math. 96 (1956), 125-142.
- [3] GOLDBERG, K.P., New definition for quasisymmetric functions, Mich. Math. J. (1974), 49-62.
- [4] KELINGOS, J.A., Boundary correspondence under quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A.I] 413 (1966), 1-15.
- [5] KRZYŻ, J.G., Boundary correspondence under quasiconformal mappings revisited, to appear.
- [6] LEHTINEN, M., Remarks on the maximal dilatation of Beurling-Ahlfors extension, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A.I.] 9 (1984).
- [7] PARTYKA, D., J. ZAJAC, An estimate of the integral of quasisymmetric functions, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska Sectio A, Vol. XL 18 (1986), 171-183.

# On the Yamabe Problem

by

Patricio Aviles<sup>1</sup>

Abstract: We give an account of the Yamabe problem in Riemannian manifolds.

A basic question in Riemannian geometry is whether a Riemannian manifold (compact with or without boundary or complete) may be conformally deformed to achieve constant scalar curvature. In the case of compact manifolds this is known as the Yamabe Problem because Yamabe claimed in 1960 to have proven the result. In the late 60's N. Trudinger found a deficiency in Yamabe's original proof, namely the following. We consider the conformal deformation of the form  $g' = \phi^{4/(n-2)}g$  and assume the scalar curvature of  $g'$  is constant, then  $\phi > 0$  satisfies the equation

$$(1) \quad 4(n-1)/(n-2)\Delta\phi + R\phi = c\phi^{(n+2)/(n-2)}.$$

To solve (1), Yamabe used the variational method, he considered the functional for  $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ ,

---

<sup>1</sup>Partially supported by an NSF grant.

$$(2) \quad J_q(\phi) = \left[ 4 \frac{(n-1)}{(n-2)} \int_M \nabla^i \phi \nabla_i \phi \, dv + \int_M R(x) \phi^2 \, dv \right] \|\phi\|_q^{-2}$$

where  $2 \leq q \leq N = \frac{2n}{n-2}$  and  $M$  is the manifold into consideration. He then considered  $\mu_q = \inf J_q(\phi)$  for all  $\phi \geq 0$ ,  $\phi \neq 0$  that belongs to  $H^1(M)$ .

Then Yamabe proved that for  $2 < q < N$ , there exists a  $C^\infty$  strictly positive function  $\phi_q$  satisfying

$$(3) \quad 4 \frac{(n-1)}{(n-2)} \Delta \phi_q + R \phi_q = \mu_q \phi_q^{q-1}, \|\phi_q\|_q = 1.$$

He then claimed the inequality  $\|\phi_q\|_{q_n} \leq c \|\phi_q\|_{q_1}$ , which will show by letting  $q_n \rightarrow \infty$  that  $\phi_q$  are uniformly bounded and hence we can let  $q \rightarrow N$  to achieve the result. However for the sphere the inequality is wrong. In the negative case  $\mu_q < 0$  Trudinger [T] overcame the mistake. In the positive case,  $\mu_q > 0$ , the problem is more difficult.

Aubin in the late 70's showed one important case of the Yamabe problem by examining the local geometry. His result can be stated as follows.

**Theorem 1** (Aubin [Au]). If  $M_n$  ( $n \geq 6$ ) is a compact non-locally conformally flat Riemannian manifold, then (1) has a  $C^\infty$  nontrivial solution with  $c > 0$ .

The remaining cases were open for several years, until R. Schoen [S1] in 1984 by a delicate study of the global geometry solved them. His theorem can be stated as follows.

**Theorem 2** (Schoen [S1]). If  $M_n$  ( $n = 3, 4, 5$ ) is any compact manifold then (1) has  $C^\infty$  nontrivial solution with  $c > 0$ . The same holds if  $n \geq 6$  and  $M$  is a locally conformally flat Riemannian manifold.

In the case of manifolds with boundary, the main difficulty in understanding (2), when  $q = N$ , is that the conformal change has to be compatible with the boundary conditions imposed. A set of natural boundary conditions were studied recently by J. Escobar [E]. His result reads as follows. Consider the functional

$$Q_g(\phi) = \frac{\int_M (|\nabla \phi|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R \phi^2) dv + \frac{n-2}{2} \int_{\partial M} h \phi^2 d\sigma}{\left( \int_M \phi^{\frac{2n}{n-2}} dv \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

where  $dv$  and  $d\sigma$  are the Riemannian measure on  $M$  and the induced Riemannian measure in  $\partial M$  with respect to the metric  $g$ ,  $R$  is the scalar curvature of  $M$  and  $h$  is the mean curvature of  $\partial M$ . Let  $Q_g(M)$  be then defined by

$$Q_g(M) = \inf\{Q_g(\phi), \phi \neq 0 \in H^1(M)\}.$$

Then it is shown that by proving that the infimum is achieved (when  $M$  is not conformally equivalent to  $S_+^n$  with its standard metric)

**Theorem 3** (Escobar [E]). Any compact Riemannian manifold with boundary and dimension 3, 4 or 5 is conformally equivalent to one of constant scalar curvature where the boundary is minimal with respect to the new metric. When  $n \geq 6$  (i) there exists a non-umbilic point at  $\partial M$ , or (ii) the boundary

is umbilic and  $M$  is locally conformally flat, or (iii) the boundary is umbilic and the Weyl tensor does not vanish identically, the same holds.

It is natural then to study solutions of (1) with higher index (that is no minima solutions). Schoen [S2] has been recently studying the structure of this space. For equations somewhat related to (1) Bahri and Coron [BC] has obtained a nice existence result of solutions with higher index.

The Yamabe problem in noncompact Riemannian manifolds is in general a very subtle problem which seems to have been posed for the first time by Yau [Y] and Kazdan [K]. One reason that makes the problem very non-standard is the fact that the interplay between the structure of the manifold at infinity and the analysis needed to solve the problem is very unclear. For instance if we consider the Sobolev quotient

$$J(\phi) = 4 \frac{(n-1)}{(n-2)} \int_M |\nabla \phi|^2 dv + \int_M R(x) \phi^2 dv / \left( \int_M \phi^{2n/(n-2)} dv \right)^{\frac{(n-2)}{n}}$$

and defined  $\mu = \inf J(\phi)$  for all  $\phi \geq 0$ ,  $\phi \neq 0$ ,  $\phi \in H^1(M)$ , the necessary embedding and compactness theorems are not available, and even if they were the necessary analysis to solve it in the positive case seems difficult.

In collaboration with R. McOwen [A-MO,I] we have studied the negative case in a general complete non-compact Riemannian manifold. This reduces to study the semilinear elliptic equation

$$(4) \quad 4 \frac{(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u - u^{(n+2)/(n-2)} = Ru$$

where  $\Delta_g$  and  $R$  denote the Laplace-Beltrami operation and scalar curvature respectively for the Riemannian manifold  $(M, g)$ , with  $\dim M = n > 2$ .



Our results are close to best possible and they summarize as follows.

**Theorem 4.** If  $(M, g)$  is a complete Riemannian manifold with non-positive scalar curvature  $R$  satisfying

$$(5) \quad R(x) \leq -\epsilon < 0$$

for  $x \in M \setminus M_0$ , where  $M_0$  is a compact set, then there is a complete conformal metric  $\bar{g}$  with scalar curvature  $\bar{R} \equiv -1$ .

Suppose now that  $R$  vanishes at infinity. Even if  $R < 0$  on  $M$ , it may not be possible to solve (4). Indeed Ni in [N] constructed metrics  $g$  in  $\mathbb{R}^n$  which are uniformly equivalent and conformal to the Euclidean metric, with  $R < 0$ ,

$$|R(x)| = O(|x|^{-\ell}) \quad |x| \rightarrow \infty$$

and  $\ell > 2$ . If  $\bar{g}$  were conformal to  $g$  with  $\bar{R} \equiv -1$ , then  $\bar{g}$  would also be conformally Euclidean. Then we write  $\bar{g} = v^{4/(n-2)} dx^2$  to find

$$4 \frac{(n-1)}{(n-2)} \Delta v - v^{(n+2)/(n-2)} = 0$$

in  $\mathbb{R}^n$ ; hence  $v = 0$  (see [AvI]).

Thus some negativity condition on  $R$  is required to achieve  $\bar{R} \equiv -1$ . It is natural to impose

$$(6) \quad R(x) \leq -C r(x)^{-\ell} \quad \text{for } x \in M \setminus M_0$$

where  $0 < \ell < 2$  and  $r(x)$  is the geodesic distance to a fixed point  $x_0$  in the interior of  $M_0$ . This condition is indeed sufficient, at least if we add an assumption (also natural) on the Ricci curvature

$$(7) \quad \text{Ric}(\nu, \nu) \geq Cr(x)^{-2a}, x \in M$$

where  $\nu = \frac{\partial}{\partial r}$  at  $x$  (whenever defined).

Theorem 5. If  $(M, g)$  is a complete Riemannian manifold with non-positive scalar curvature  $R(x)$  satisfying (6) and Ricci curvature satisfying (7) where  $0 \leq a < 1$  and  $2a \leq \ell < 1 + a$ , then there is a complete conformal metric  $\bar{g}$  with  $\bar{K} \equiv -1$ .

An important observation is the fact that unrestricted non-negativity of the scalar curvature  $R$  in  $M_0$  in the above two results is not possible. In [A-M0, I] we have given an example that shows this fact. In general if one allows unrestricted non-negativity of the scalar curvature  $R$  on compact positions of  $M$  we have

Theorem 6. If  $(M, g)$  is a complete Riemannian manifold so that the conformal Laplacian,  $-\Delta + (n-2)/4(n-1)R$  has negative first eigenvalue for zero Dirichlet conditions on some compact set. Then there is a conformal metric  $\bar{g}$  with  $\bar{K} = -1$ . Moreover,  $\bar{g}$  is complete if (5) holds for  $x \in M / M_0$  where  $M_0$  is a compact set or if (6) and (7) hold with  $0 \leq a < 1$  and  $2a \leq \ell < 1 + a$ .

It should be pointed out that it is possible to construct a complete Riemannian manifold so that there are not complete conformal equivalent metrics of constant scalar curvature (of any sign). Therefore the Yamabe

problem is in general false in complete Riemannian manifolds. As it was pointed out earlier, to find reasonable good topological conditions which guarantee the existence of a complete conformal metric of constant positive scalar curvature seems to be a very difficult problem.

There is one basic and important case of the Yamabe problem in complete Riemannian manifolds which has recently been studied for both signs of the scalar curvature. It can be described in the following way. Let  $(M, g)$  be a compact manifold. Let  $\Gamma$  be a closed set in  $M$  and consider the complete manifold  $(M \setminus \Gamma, \hat{g})$   $\hat{g} = \delta^{-2}g$  where  $\delta$  is the regularized distance to  $\Gamma$ . Then building upon the earlier work of Loewner and Nirenberg [LN] in the standard sphere the author and McOwen showed the following.

Theorem 7 ([A-MO, II]). Suppose  $(M, g)$  is a compact Riemannian manifold of dimension  $n \geq 3$  and let  $\Gamma$  be a closed smooth submanifold of dimension  $d$ . Then there is a complete conformal metric to  $\hat{g}$  on  $\hat{M} = M \setminus \Gamma$  with constant negative scalar curvature if and only if  $d > (n - 2) / 2$ .

The corresponding result for positive scalar curvature, which is, of course, a very different theorem has been studied by R. Schoen [S3] in the case of the standard sphere  $S^n$ . His surprising result can be stated as follows.

Let  $u > 0$ ,  $u \in C^\infty(S^n - \Gamma) \cap L^p(S^n)$  and suppose  $u$  satisfies

$$(8) \quad Lu + \frac{n(n-2)}{4} u^p = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(S^n)$$

where  $p = \frac{n+2}{n-2}$ ,  $Lu = \Delta_{g_0} u - \frac{n(n-2)}{4} u$ ,  $g_0$  denotes the standard metric on  $S^n$ .

**Theorem 8** (Schoen [S3]). There are closed sets  $\Gamma$  (of Hausdorff dimension  $< \frac{n-2}{2}$ ), which includes for example Cantor type sets of Hausdorff dimension less than  $\frac{n-2}{2}$ , a collection of finite number of points etc., so that the metric  $g = u^{4/(n-2)} g_0$  defined a complete Riemannian metric of constant positive scalar curvature, where  $u$  is a solution of (8).

Other very interesting results have been obtained by Schoen and Yau [SY].

I shall finally mention that from a more analytical point of view the problem of understanding metrics "at infinity" is related to the study of the singularities of positive solutions of scalar equations. That is, let  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, n \geq 3\}$  and let  $\Gamma$  be a closed set contained in  $B$ . Suppose  $u \in C^\infty(B \setminus \Gamma)$  is a non-negative solution of the semilinear elliptic equation

$$\Delta u + u^q = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(B)$$

$$\frac{n}{n-2} \leq q \leq \frac{n+2}{n-2}.$$

An important and difficult problem is to understand the behavior of  $u$  in  $\Gamma$ . This is in general a quite difficult problem which is only understood in the case that  $\Gamma$  is a single point, that is when  $u$  has an isolated singularity. The main known results can be stated as follows.

**Theorem 9.** Let  $u \in C^\infty(B \setminus \{0\})$  be a non-negative solution of the semilinear elliptic equation

$$\Delta u + u^q = 0 \quad \text{in } B \setminus \{0\}.$$

Then  $u$  has a removable singularity at  $\{0\}$  or

$$(a) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{n-2} (-\ell n|x|)^{\frac{(n-2)}{2}} u(x) = \left(\frac{n-2}{4}\right)^{n-2}$$

when  $q = \frac{n}{n-2}$ , see Aviles [Av II].

$$(b) \quad \lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^{2/(q-1)} u(x) = \frac{2(n-2)}{(q-1)^2} \left(q - \frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

when  $\frac{n}{n-2} < q < \frac{n+2}{n-2}$ , see Gidas and Spruck [GS], and Aviles [AV,II].

(c) If  $q = \frac{n+2}{n-2}$ , then

$$u(x) = (1 + o(1)) \psi(|x|) \quad \text{as } |x| \rightarrow 0$$

where  $\psi(r) = \psi_D(\log r) / r^{\frac{n-2}{2}}$ ,  $0 \leq D \leq -\frac{2}{n} \left(\frac{n-2}{n}\right)$  where  $\psi_D$  are solutions of

$$\psi''(t) - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \psi'(t) + \psi^{\frac{n+2}{n-2}}(t) = 0 \quad 0 < t < \infty,$$

see Caffarelli, Gidas and Spruck [CGS].

I would like to close this note by mentioning that we have recently been studying the case in which  $\Gamma$  is not a single point. The results will appear in a forthcoming paper [AV,III].

### Acknowledgment

I would like to thank the Japan Association for Mathematical Sciences for their kind support which made it possible for me to visit Japan, in particular Hokkaido University. I would also like to thank Professor Y. Giga for his kindness and many attentions to me and my family.

### References

- [AV,I] Aviles, P., Phragmén-Lindelöf theorems for nonlinear elliptic equations II, Arch. for Rat. Mech. & Analysis Vol. 97, No. 2(1987), 141-170.
- [AV,II] Aviles, P., Local behavior of solutions of some elliptic equations, Commun. Math. Phys. 108(1987), 177-192.
- [AV,III] Aviles, P., In preparation.
- [A-MO,I] Aviles, P., & McOwen, R., Conformal deformation to constant negative scalar curvature on non-compact Riemannian manifolds, J. Diff. Geometry, Vol. 27, No. 2(1988), 225-239.
- [A-MO,II] Aviles, P., & McOwen, R., Complete conformal metrics with negative scalar curvature on compact Riemannian manifolds, Duke Math. Journal, Vol. 56, No. 2(1988), 395-398.
- [Au] Aubin, T., Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, New York Heidelberg, Berlin 1982.
- [BC] Bahri, A., & Coron, J.M., On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent; the effect of the topology of the domain CPAM Vol. 41 (3), (1988), 253-294.
- [CGS] Caffarelli, L., Gidas, B., & Spruck, J., Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, CPAM Vol. 42 (3), (1989), 229-334.
- [E] Escobar, J., The Yamabe problem in manifolds with boundary, Journal of Differential Geometry, to appear.
- [GS] Gidas, B., & Spruck, J., Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations CPAM 4(1981), 525-598.

- [K] Kazdan, J., Prescribing the curvature of a Riemannian manifold, Amer. Math. Soc. Providence, RI 1985.
- [LN] Loewner, C., & Nirenberg, L., Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, Contributions in Analysis Academic Press, New York 1974, 245-272.
- [N] Ni, W.-M., On the elliptic equation  $\Delta u + k(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ , Indiana Univ. Math. J. 31(1982), 493-529.
- [S 1] Schoen, R., Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geometry 20(1984), 479-495.
- [S 2] Schoen, R., In preparation.
- [S 3] Schoen, R., The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equation, CPAM 41(1988), 317-392.
- [SY] Schoen, R., & Yau, S.T., Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature, Inv. Math. 1988.
- [T] Trudinger, N., Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22(1968), 265-274.
- [Y] Yau, S.T., Seminar on differential geometry, Problem section, Annals of Math. Studies No. 102, Princeton University Press, Princeton, NJ 1982.

Patricio Aviles  
 Department of Mathematics  
 University of Illinois at Urbana-Champaign  
 Urbana, Illinois 61801

# Oblique 問題について

石井 仁司 (中大・理工・数)

## 二階楕円型方程式に対する境界値問題

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ B(x, u, Du) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を考える。ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  は開集合、 $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  は未知関数、 $F$  と  $B$  は実数値関数とする。 $Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ ,  $D^2u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})_{1 \leq i, j \leq N}$  とする。 $N$  次実対称行列の全体を  $\mathcal{S}^N$  で表わす。 $F(x, u, Du, D^2u) = 0$  が楕円型であるとは

$$X, Y \in \mathcal{S}^N, X \leq Y \text{ ならば } F(x, r, p, X) \geq F(x, r, p, Y)$$

が成り立つことを意味する。但し、 $X \leq Y$  とは、 $\langle X\xi, \xi \rangle \leq \langle Y\xi, \xi \rangle$

が  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$  に対して成り立つことである。境界条件  $B(x, u, Du) = 0$  が oblique であるとは

$$x \in \partial\Omega \text{ のとき, } \langle n(x), D_p B(x, r, p) \rangle > 0$$

が成り立つことである。但し、 $n(x)$  は  $x$  における  $\Omega$  の外向き単位法ベクトルを表わす。

Crandall と Lions により導入された弱解 = viscosity solution の一意存在について、次の結果が得られた。

定理: 後で述べる仮定 (Q. 1-2), (B. 1-3), (F. 1-4) の下で次が成り立つ。

(i)  $u$  が subsolution で、 $v$  が supersolution ならば、 $u \leq v$  on  $\bar{\Omega}$ .

(ii) (i) の解  $u \in C(\bar{\Omega})$  が存在する。

仮定を列挙する。

(Q. 1)  $\Omega$  は有界.

(Q. 2)  $\partial\Omega$  は  $C^1$  クラスである.



$$(B.1) \quad B \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N).$$

$$(B.2) \quad \forall r \in \mathbb{R}, \forall z \in \partial\Omega \text{ に対して, } z \text{ の近傍 } U \text{ があって,}$$

$$(i) \quad \hat{B} = B(\cdot, r, \cdot) \in C^{1,1}(U \times \mathbb{R}^N),$$

$$(ii) \quad x \in U \text{ ならば, } \langle n(x), D_p \hat{B}(x, p) \rangle \geq 1,$$

$$(iii) \quad C > 0 \text{ があって,}$$

$$|\hat{B}(x, p)|^V |D_x \hat{B}(\dots)|^V \|D_x^2 \hat{B}(\dots)\| \leq C(|p|+1),$$

$$|D_p \hat{B}(\dots)|^V \|D_x D_p \hat{B}(\dots)\| \leq C, \quad \|D_p^2 \hat{B}(\dots)\| \leq \frac{C}{|p|+1} \quad \text{a.e.}$$

となる。

$$(B.3) \quad r \mapsto B(x, r, p) \text{ は非増加関数である.}$$

$$(F.1) \quad F \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N).$$

$$(F.2) \quad \lambda > 0 \text{ があって, } r \mapsto F(x, r, p, X) - \lambda r \text{ は非増加関数である.}$$

$$(F.3) \quad m \in C[0, \infty) \quad (m(0)=0) \text{ があって,}$$

$$\alpha > 1, \quad X, Y \in \mathbb{S}^N, \quad -\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \text{ ならば,}$$

$$F(x, r, p, X) - F(y, r, p, -Y) \geq -m(|x-y|(|p|+1)) + \alpha|x-y|^2$$

となる。

$$(F.4) \quad \partial\Omega \text{ の近傍 } V \text{ と } m \in C[0, \infty) \quad (m(0)=0) \text{ があって,}$$

$$x \in V \cap \bar{\Omega} \text{ ならば, } |F(x, r, p, X) - F(x, r, q, Y)| \leq m(|p-q| + \|X-Y\|)$$

となる。

# Quantization of a Poisson algebra and polynomials associated to links.

小沢哲也 (名大. 理)

リーマン面の基本群の Lie 群への表現類空間は、Teichmüller 空間 ~~など~~ の場合にみられるように、Riemann 面に関するいろいろな幾何学と関連していて、古くから興味をもたれてきました。

この表現類空間上には (regular part には) 自然な symplectic structure がはおり、それに関する古典力学 (Hamilton 系) についての Wolpert や Goldman たちの研究がありました。

さて「その量子化は？」という問いが自然に生じます。最近 Turaev によつて、Wolpert-Goldman の無限次元 Lie 環の ~~量子化~~ 量子化 ( $\equiv$  非可換化) があたえられました。この量子化は少し形式的なものではありますが、そこで作られる idea は幾何学的なもので、3次元多様体内のリンクのトポロジーと深く関係しています。

この講演の目的は、Turaev の量子化と関連においてリンクの 1 つの多項式不変量を定義しその性質について述べることにあります。

Yang-Baxter 方程式を通し、量子群とリンクの不変量を結びつける仕事や、conformal field theory を使ったリンクや多様体の不変量を求める仕事などが最近話題になっています。それらとの関連を調べることは興味ある問題と思われれます。

# 「素数の分布について」

理工学部数学物理学科教授 土 井 公 二

米国ニュージャージー州にプリンストンというそれはそれは美しい大学町があつて、その Princeton 大学に志村五郎教授(1930年2月23日生れ)という大数学者がおられる。1988年夏に日本アイビーエム株式会社が発刊している「無限大」という刊行物No. 78に志村教授は「少年は大志を抱いたか」と題するエッセイを深い洞察とあふれるばかりの知識をもって発表され、一般読者に強烈なる啓(けい)もうを与えられた(必要があればいつでもコピーしてさし上げます)。その中のほんの一文をここで引用させていただくことにしよう。曰く、「数学的生涯の出発点にある少年達は数学の多様性と深さについて十分に知らされるべきであり、その知識の上で方向を選ぶことが望ましい。なお趣味という言葉の他に付け加えるならば、「現状に対する居心地の悪さ」というものがある。つまり既成の理論・方法に完全には満足できない気持、何かよりよい原理があるはずだという漠然たる予感などを持ち得るか否かである。これは物理学でなら、理論と実際との食い違いなどから普通に言われるであろうが、数学でも重要である。理論・方法・原理などという言葉の様式・技法・理念等に置きかえれば、「居心地の悪さ」は芸術にもあてはまるだろう。ポアンカレ予想のような世間周知の問題について言うならば、その問題をそのままの形で受け入れるのではなく、別の視点から見ようという態度である。そして、居心地の悪さを居心地のよいものにしようという気持をアンビションのうちに入れることができよう。私には、この種のアンビションが数学では、そして多分他の科学でも、もっとも自然で、また実り多きもののように思われる。

別種のアドバイスとして、どこかで読んだ中国の話をここにいれておこう。昔ある男が鳥を鉄砲で撃って捕りたかったがいくら試みても当らなかった。そこで鉄砲撃ちの名

人に弟子入りして修行した。数年を経て少しも進歩しないので、ついにあきらめて故郷に帰ることにした。そこで、名人が男にさとしていった。「君もここにいる間には物にならなかったが、あきらめるのは早い。うちに帰ったら、高くて広い壁に向かって鉄砲を撃ちなさい。いくらなんでもどこかに当るだろう。そうしたら穴のまわりに好きな鳥の画を描きなさい。」

これは元来政治的な諷刺であると思われるが、数学者などへの忠言としても意味がある。

以上が先にのべた「少年は大志を抱いたか」の一部である。さて26年前、佐藤幹夫教授（現在京大数理解析研究所長）が阪大教授に赴任されたとき、私は助手として東京からつれてきていただいたのだが、阪大の数学教室で顔をみかけられるやいなや「君は志村理論を勉強したいとゆうことであるが、それでは保型形式にはかなり精通しておられるのでしょうか」と言われて「いえ、ほとんど何も知りません。」すると「明日10時までに、

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) x^n$$

を展開して  $a(1) \sim a(50)$  ぐらいまで係数  $a(n)$  を計算して持ってきておみせなさい、それから先はその後で…。」その夜もちろん一睡もできなかったが、 $\prod_{n=1}^{\infty}$  というものでも  $x$ 、 $x^2$ 、 $x^3$ 、 $x^4$ 、… の係数が次々に手で求められるものだということをこの時始めて知り、同時に  $a(n)$  とはまことに神秘的であるという予感を体得した。26年経て現在、志村五郎教授の画はまことにまことに大きくなって、ただただ圧倒されるばかりの今日このごろではあるが、少年の時に持った夢だけは正しかったという誇りを捨てきれない。最後に、 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ （リーマンのゼータ関数と呼ばれる）に対し、上でのべた  $a(n)$  について

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a(n)^2 n^{-s} \right) / \zeta(s-11)$$

は複素変数  $s$  に関して整函数であるという事実が1975年志村五郎教授によって示されたことを附言する。

# 微分方程式の解析的分類と不変量

夏島 秀行 (一橋大)

1988年11月24日

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(A_0 + \frac{A_1}{z}\right) \frac{du}{dz} + \left(B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}\right) u = 0$$

一般合流型超幾何方程式

$z = \infty$  かつ  $\alpha, \beta = \beta_2$  - 次  $\alpha$  より高次方程式解  $z \neq \infty$ .

$$u = C_1 e^{P_1 z} z^{K_1} \phi_1(z) + C_2 e^{P_2 z} z^{K_2} \phi_2(z)$$

$$P_1, P_2 \text{ は } P^2 + A_0 P + B_0 = 0 \text{ の根. } P_1 \neq P_2 \text{ とする.}$$

$$K_i = \frac{A_1 P_i + B_1}{2 P_i + A_0} \quad (i=1, 2)$$

$$\phi_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(P_i) z^j$$

$$C_{k+1}(P_i) = \frac{(K_i + k)(K_i + k + 1) - A_1(K_i + k) + B_2}{(2P_i + A_0)(K_i + k + 1) - (A_1 P_i + B_1)} C_k(P_i)$$

$$\alpha, \beta \text{ は } t^2 - (2 - A_1)t + (2 - A_1 + B_2) = 0 \text{ の根とすると}$$

$$\gamma_i = 2 - K_i$$

$$C_{k+1}(P_i) = \frac{(\alpha - \gamma_i + k + 1)(\beta - \gamma_i + k + 1)}{(2P_i + A_0)(k + 1)} C_k(P_i)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}) & -(A_0 + \frac{A_1}{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

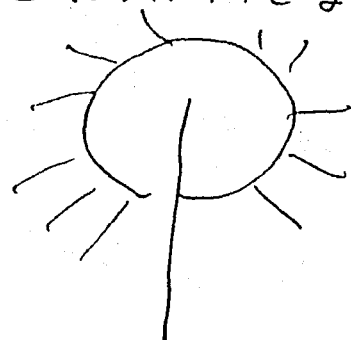
$$\downarrow \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(z), \phi_2(z) \\ \psi_1(z), \psi_2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{形式変換}) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{\kappa_1}{z}, & \\ & P_2 + \frac{\kappa_2}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

$z = \infty$  での 1 級の不確定性原理  $E$  と、方程式 (1) の

形式変換 (2) での対角型行列方程式 (3) に変換したものは、漸近展開の理論より

$\mathcal{S}(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$  上の  $\begin{bmatrix} \phi_1(z), \phi_2(z) \\ \psi_1(z), \psi_2(z) \end{bmatrix}$  に漸近展開可能で、正則関数なり。

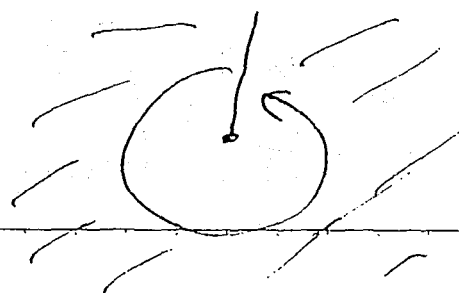


$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1'(z), \tilde{\phi}_2'(z) \\ \tilde{\psi}_1'(z), \tilde{\psi}_2'(z) \end{bmatrix} = \tilde{\Phi}_1(z) \quad \text{or } z.$$

$$\tilde{\Phi}_1(z) \begin{bmatrix} e^{P_1 z} z^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{\kappa_2} \end{bmatrix} \quad \text{or } \mathcal{S}(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, r) \text{ 上の}$$

(1) の解の基底行列に与る。

$$\mathcal{S}(-\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi) \rightarrow \tilde{\Phi}_2(z)$$



$$\theta = \arg(P_1 - P_2)$$

$$\{(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\pi; r) \cap (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi; r) = \{(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\pi; r) = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_1(z) \begin{bmatrix} e^{P_1 z} z^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{\kappa_2} \end{bmatrix} = \tilde{\Phi}_2(z) \begin{bmatrix} e^{P_1 z} z^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{\kappa_2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}_2^{-1}(z) \tilde{\Phi}_1(z) \begin{bmatrix} e^{P_1 z} z^{\kappa_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{\kappa_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-P_1 z} z^{-\kappa_1} & 0 \\ 0 & e^{-P_2 z} z^{-\kappa_2} \end{bmatrix}$$

Thus

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{11} = C_{22} = 1,$$

$$C_{12} = 0, C_{21}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

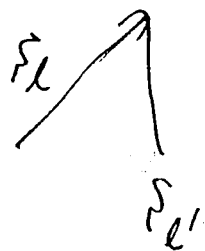
$$\frac{\pi}{2} - \arg(P_1 - P_2) < \arg z < \frac{3}{2}\pi - \arg P_1$$

$$\frac{\pi}{2} < \arg z(P_1 - P_2) < \frac{3}{2}\pi$$

$$\operatorname{Re} z(P_1 - P_2) > 0$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{\kappa_1}{z} \\ P_2 + \frac{\kappa_2}{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \Phi(z) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$



$$\Phi_e(z) e^{\left[ P_1 + (L, z) K_1 \right.}$$

$$\left. P_2 + (L, z) K_2 \right]$$

$$= \Phi_{e'}(z) e^{\left[ \right.}$$

$$\left. \right] \underbrace{C_e e'}$$

$$\Xi = \Phi_e^{-1} \Phi_{e'}(z) = e^{\square} C_e e' e^{-\square} \quad (-\text{Ad } e') \text{ Stokes } \text{iff } K_2$$

$$(*) \quad \frac{d}{dz} \Xi = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{K_1}{z} & \\ & P_2 + \frac{K_2}{z} \end{bmatrix} \Xi - \Xi \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\text{Em. } \Xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)}(I; r) = \left\{ \text{a set of } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{iff } \text{in } \mathbb{R}^n \text{ or } \mathbb{C}^n \right\}$$

$$\hookrightarrow \text{a set of } \gamma' \text{ s.t. } \text{a set } \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)}$$



$$\{ \Phi_e^{-1} \Phi_{e'} \} \in H^1(\gamma', \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)})$$

$$\parallel$$

$$\subset \text{Im}(*).$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{C}^2.$$



$$U_0 = \{ e^{i\tau} \mid -\frac{\pi}{2} - \theta < \tau < \frac{3}{2}\pi - \theta \}$$

$$U_1 = \{ e^{i\tau} \mid \frac{\pi}{2} - \theta < \tau < \frac{5}{2}\pi - \theta \}$$

$$H'(f', \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)}) = H'(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)})$$

$$= C'(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)})$$

$$= \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)}(U) \oplus \Lambda_{(P_1, K_1, P_2, K_2)}(U_+)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$U_0 \cap U$$

$$= \{ e^{i\tau} \mid -\frac{\pi}{2} - \theta < \tau < \frac{\pi}{2} - \theta \}$$

$$U \setminus \{ e^{i\tau} \mid \frac{\pi}{2} - \theta < \tau < \frac{3}{2}\pi - \theta \}$$

$$= U_- \cup U_+$$

$$z^{K_i} \phi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(P_i) z^{-k+K_i}, \quad (i=1,2)$$

(Borel 変換)

$$B(z^{K_i} \phi_i(z)) (s) = \sum \frac{c_k(P_i)}{\Gamma(k+K_i)} \Big\{ \begin{matrix} k \in K_i + s \\ k \leq K_i - 1 \end{matrix} \Big\} \quad (i=1,2)$$

$$\phi_i(s)$$

$\phi_1(s)$  と  $\phi_2(s)$  とは既約な関数!

$$\phi_i(s)$$

↓ Laplace 変換

$$\int_0^\infty e^{-zs} \phi_i(s) ds = z^{\kappa_i} \tilde{\phi}_i(z)$$

$$e^{P_i z} z^{\kappa_i} \tilde{\phi}_i(z) \text{ は } \textcircled{1} \text{ の形}$$

$$\phi_i(s) = \frac{(2P_i + A_0)^{\kappa_i-1}}{\Gamma(\kappa_i)} C_0(\rho) \left( \frac{s}{2P_i + A_0} \right)^{1-\sigma_i} F(\alpha - \sigma_i + 1, \beta - \sigma_i + 1; 2 - \sigma_i; \frac{s}{2P_i + A_0})$$

超幾何方程式 (i=1, 2)

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (C - (a+b+1)\xi) \frac{du}{d\xi} - abu = 0$$

2点  $\xi=0, 1$  における基本解は

$$F_0 = (F(a, b, c; \xi), \xi^{1-c} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; \xi))$$

$\xi=1$  における

$$F_1 = (F(a, b; 1+a+b-c; 1-\xi), (1-\xi)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-\xi))$$

$$F_0 = F_1 \begin{pmatrix} \text{1 階行列} \\ \text{定数行列} \end{pmatrix}$$

$$s = 1/2 - \varepsilon + iy$$

$$\xi^{1-\sigma} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; \xi) = a_{11} F(a, b, 1+a+b-c; 1-\xi) \\ + a_{12} (1-\xi)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-\xi)$$

$$\begin{matrix} \textcircled{x} & \textcircled{x} \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\phi_1((\xi-1)e^{2\pi i} + 1) - \phi_1(\xi) = \underbrace{a_{12} \left( e^{(c-a-b)2\pi i} - 1 \right)}_{C_{21}} \phi_2(\xi - (a-b))$$

Esalle a resurgent equation.

$$A_0, A_1, B_0, B_1 \in \mathbb{C} \text{ and } P_1, P_2, K_1, K_2$$

$$B_2 \text{ is parameter} \rightarrow \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} P_1 + \frac{K_1}{z} & 0 \\ 0 & P_2 + \frac{K_2}{z} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow H'(\tilde{r}', \mathbb{A}, \Lambda_r)$$

$$(B_2' - B_2 + n)^2 = n^2((A_1 - 1)^2 - 4B_2) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Le 24/11/89.

## Local Weierstrass theory in an asymptotic case.

Let  $\mathcal{A}_S$  be the ring of germs at the origin of  $\mathbb{C}^n$  of holomorphic functions in a polysector  $S$  and having in  $S$  an asymptotic expansion. For every  $\psi \in \mathcal{A}_S$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0, x \in S} \psi(x)$  exist and is denoted by  $\psi(0)$ . We have the division theorem in the ring of polynomials  $\mathcal{A}_S[y]$ .

One of the first proof of the classical preparation theorem for the ring of germs of holomorphic functions at the origin of  $\mathbb{C}^n$ , was given by

L. Stikrelberger [1]. And his very simple proof goes over to the asymptotic case.

Let  $\mathcal{H}$  be the ring of germs of holomorphic functions in some product  $S \times (D = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| < r\})$  of the form  $g = \sum_{m \geq 0} g_m(x) y^m$  ( $g_m(x) \in \mathcal{A}_S$ ).

The germ  $g$  is said of order  $b$  if  $g_b(0) \neq 0$  and  $g_i(0) = 0$  for all  $0 \leq i < b$ . Now let us state the results.

Preparation theorem. If  $g$  is of order  $b$  then there exist uniquely determined, an invertible element  $e \in \mathcal{H}$ , a Weierstrass polynomial of degree  $b$  such that

$$g = ew$$

$$w = y^b + w_1(x)y^{b-1} + \dots + w_b(x); w_i(x) \in \mathcal{A}_S, w_i(0) = 0$$

Division theorem. Let  $g \in \mathcal{H}$  of order  $b$ . Then every  $f \in \mathcal{H}$  can be uniquely written in the form

$$f = qg + r$$

where  $r \in \mathcal{A}_S[Y]$ ,  $d^0 r < b$ .

As we have division in  $\mathcal{A}_S[Y]$  we get also theorem:  $\mathcal{H}$  is Henselian. That is, if  $P(x, y) \in \mathcal{A}_S[Y]$  with  $P(0, y) = \prod_{i=1}^P (y - \alpha_i)^{b_i}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ . ( $b = b_1 + \dots + b_P$ ) then

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^P P_i(x, y), \quad P_i(x, y) \in \mathcal{A}_S[Y]$$

$$d^0 P_i = b_i \quad \text{and} \quad P_i(0, y) = (y - \alpha_i)^{b_i}.$$

As an application of this theory we have the following result. Let  $F(x, y) = \sum_{m \geq 0} f_m(x) y^m$

$f_m(x) \in \mathcal{A}_S$ ,  $f_m(x) \sim_S \hat{f}_m(x)$ , then each formal solution of

$$\hat{F}(x, y) = \sum \hat{f}_m(x) y^m = \sum_{m+|p| \geq 0} f_{m,p} y^m x^p$$

is the asymptotic expansion of an actual solution of  $F(x, y) = 0$ .

[1]. Über einen Satz des Herrn Noether  
Math. Ann. 30, 401-409.

R. GÉRARD  
Institut de Recherche Mathématique Alsacien  
STRASBOURG France.

## Lie-Drach-Vessiot 理論について

熊本大学 梅村 浩

Painlevé の仕事がほぼ解明された現在, 代数微分方程式論における最も重要な問題は

一般化の問題 A. Lie の夢見た (無限) 微分 Galois 理論と実現することは可能か.

詳しく述べると, Lie (1842-99) は代数方程式の Galois 理論を微分方程式に拡張することを目標としていた. 一般的には無限次元の理論であるが, 彼は有限次元の理論の建設より始めなければならなかった. その過程において Lie 群論, Lie 環論等が生れた. 無限次の理論の Lie 全集に占める割合は小さい. フランスの Drach (1871-1941) は Lie の夢の実現を試みた. しかし彼の仕事には, 明石屋でなり定義, ギャップのある証明が多く, どのような事情により, このような不完全な仕事が発版されたのか不思議である. Vessiot (1865-1952) はこの Drach の欠陥の多い仕事を見直すのに一生を費した. Vessiot の仕事は Drach の仕事より理解しやすい. しかし, 彼の仕事は Lie の求めていたものであるのか. 我々は彼の一つのアイデアを発展させて, Lie の夢を実現することを提案する.

一方よく知られたように 19 世紀の終りに有限性の条件が満される場合の Galois 理論 (例えば Picard-Vessiot 理論) は

確立された。Kolchinはこの理論を完成した。彼の仕事の集大成と言うべき著作において、差える微分の個数が0個の場合、微分環は単に可換環にすぎない、この意味で微分環論は可換環論(=代数幾何学)を含むと言えるとKolchinは述べている。ところが、Galois拡大の概念の微分体への拡張である彼の強正規拡大の定義に古典的なGalois拡大は入っていない。

統一の問題B. 何故、古典Galois拡大は必ずしも強正規拡大でなくなっているのか。即ち両者を統合する自然な定義はないのか。

問題Bにある定義の不整合性は、以前から非常に不快なものと感じていた。一般化の問題Aを考えていて、その結果統一の問題Bもそこに巻き込まれて来た。標数0ならば「統一の問題Bは解決できる。正標数である我々の提案する枠組でよいと思われる。

問題Aの解答となる理論には重要な応用があり、又新しい問題を生む。例えばRiemann, Fuchs, Schlesinger, Garnier, さらに近年の佐藤学派の仕事により線型方程式のmonodromy保存変形理論の重要性と豊さが認識されて来た。これに劣らず、微分方程式のGalois群保存変形が大成功であろうと思われる。実際DrachはPainlevé方程式が、非線形微分方程式のGalois群保存変形を考えることにより導入できると述べている。上に説明したように彼の微分Galois理論は極めて不完全なものであるので、我々の方法によってDrachの

アイデアを追求めるのは興味ある問題である。

Kolchin 学流のある人々は、一般化の問題 A と関係して微分代数群を考えた。即ち微分環に対して、微分素イデアル全体  $\text{Spec}$  を考え、それらと張り合せて多様体も定義する。さらに群構造を持った多様体を微分代数群と呼ぶ。

問題 C. 微分代数群を考える必要があるのか。

一般化の問題 A に関して言えば、微分代数群を考える必要が有り行のが我々の意見である。



# ホワイトノイズと回転群

名古屋大学 理学部

飛田 武幸

1. ホワイトノイズ は ブラウン運動  $\{B(t), t \in \mathbb{R}\}$  の時間微分  $\dot{B}(t) = \frac{d}{dt} B(t)$  で与えられる 各時刻独立な ガウス型定常超過程で, その特性汎関数は

$$C(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi\|^2\right], \quad \xi \in E,$$

である.  $E$ : test 関数の空間.

解析的に, 次のように実現される.  $\mu$  は  $E^*$  上の確率測度で

$$\int_{E^*} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\mu(x) = C(\xi)$$

なるものと  $(E^*, \mu)$  を ホワイトノイズ空間,  $(L^2) = L^2(E^*, \mu)$  の元  $\varphi(x)$  を ホワイトノイズ汎関数 (又は ブラウン汎関数) と呼ぶ.

2. 回転群  $g$  が  $E \rightarrow E$  の線型な同型写像で, かつ直交 ( $\|g\xi\| = \|\xi\|$ ,  $\forall \xi \in E$ ) 変換であるとき  $E$  の回転 という  $E$  の回転全体  $O(E)$  は群となる. これを  $E$  の回転群 という  $O_\infty$  と書くこともある. (H. Yoshizawa)

$g$  の adjoint は  $g^*$  とかく.

定理  $g^* \mu = \mu$ ,  $\forall g \in O(E)$ .

これから ホワイトノイズ解析の一側面として,  $O(E)$  にもとづく "調和解析" が見られる.

3. 超汎関数  $\{\dot{B}(t)\}$  はホワイトノイズ汎関数の変数系とみることができ、従って、 $\dot{B}(t), t \in \mathbb{R}$ , の多項式や指数関数等 (何れも "renormalization" を要するが) を含み  $(L^2)$  より大きな空間として、超汎関数空間  $(L^2)^{-}$  が導入される:

$$(L^2)^+ \subset (L^2) \subset (L^2)^- \quad \text{Sobolev 空間型.}$$

一方、 $E^*$  上の Schwartz 空間型のものとして

$$(S) \subset (L^2) \subset (S)^*$$

による超汎関数空間も考えられる。

4. Causal calculus 各  $\dot{B}(t)$  が変数とみなされることから

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial \dot{B}(t)} \quad \text{及び} \quad \text{adjoint} \quad \partial_t^*$$

が  $(L^2)^{-}$ ,  $(S)^*$  上の operator として定義される。

定理 i).  $\gamma_{s,t} = \partial_s^* \partial_t - \partial_t^* \partial_s$  は同様の generator である。

ii). number operator  $N = \int \partial_t^* \partial_t dt$  は、 $\{\partial_t, \partial_s^*\}$  の 2 次形式で  $\gamma_{s,t}$  と可換なものとして特徴づけられる。

iii). Lévy の Laplacian  $\Delta_L = \int (\partial_t dt)^2$  も同様の特性を持つことが可能である。

$(S)^*$  の元  $\exp[c \int \dot{B}(t)^2 dt]$  : は  $\Delta_L$  の固有関数として, singular measure を定義する超汎関数として, 種々の応用がある。

### [文献]

- [1] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1951
- [2] T. Hida, Analysis of Brownian functionals, Carleton Math. Lecture Notes, no.13 Carleton Univ. 1975.
- [3] T. Hida and K. Saito. ed., Bielefeld Encounters in Math. and Physics, BiBoS 400/89.

Blow-up of  $H^1$  Solutions  
for the Nonlinear Schrödinger Equation

Yoshio TSUTSUMI

Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University  
Higashisenda-machi, Naka-ku, Hiroshima 730, Japan

In this note the author introduces the results concerning the blow-up of solutions for the Cauchy problem of the nonlinear Schrödinger equation, which have been obtained in collaboration with Takayoshi Ogawa.

We consider the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation:

$$(1) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

The equation (1) is of physical interest, because it describes the self-focusing of the laser beam for  $n = 2$  and  $p = 3$  and the collapse of the one dimensional soliton in the plasma for  $n = 1$  and  $p = 5$ .

Recently, many mathematicians have been studying the behavior near blow-up time of blow-up solutions for (1)-(2). Most of these results are considered in the framework of  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . Nevertheless, the blow-up of solutions for (1)-(2) was showed only in the framework of  $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; |x|^2 dx)$  (see R. Glassey [J. Math. Phys., 18(1977), 1794-1797] and M. Tsutsumi [SIAM J. Math. Anal., 15(1984), 357-366]). When we consider the existence and

non-existence of global solutions in time for (1)-(2),  $H^1(\mathbb{R}^n)$  seems to be more natural than  $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; |x|^2 dx)$ .

We have the following two theorems.

**Theorem 1.** Assume that  $n \geq 2$  and  $1 \leq p \leq \min \{5, \frac{n+2}{n-2}\}$ . Let  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  be radially symmetric and let the initial energy  $E_0 = \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \frac{2}{p+1} \|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} < 0$ . Then, the solution of (1)-(2) in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  blows up in finite time, that is, for some finite  $T > 0$ ,  $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow T$ ).

**Theorem 2.** Assume that  $n = 1$  and  $p = 5$ . Let  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  and let the initial energy  $E_0$  be negative. Then, the solution  $u(t)$  of (1)-(2) in  $H^1(\mathbb{R})$  blows up in finite time, that is, for some finite  $T > 0$   $\|\frac{\partial u}{\partial x}(t)\|_{L^2} \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow T$ ).

**Remark.** (1) The unique local existence theorem of solutions for (1)-(2) is already established by Ginibre and Velo [J. Funct. Anal., 32(1979), 1-71]. If  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , for some  $T > 0$  there exists a unique solution  $u(t)$  of (1)-(2) in  $C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^n))$  satisfying two conservation laws of the  $L^2$  norm and the energy:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2} &= \|u_0\|_{L^2}, \\ \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{2}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} &= E_0. \end{aligned}$$

Moreover,  $T = \infty$  or else  $T < \infty$  and  $\lim_{t \rightarrow T} \|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$ .

(2) It follows from the uniqueness of solutions in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  that if  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  is radially symmetric, the solution  $u(t)$  is

also radially symmetric.

(3) The advantage of considering the blow-up problem in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  is the following. The upper bound of the blow-up time  $T$  obtained in the previous papers depends on  $\|u_0\|_{H^1}$ ,  $E_0$  and  $\|xu_0\|_{L^2}$ , but the proofs of Theorems 1 and 2 give the upper bound of  $T$  depending only on  $\|u_0\|_{H^1}$  and  $E_0$ .

10 January 1990

北海道大学理学部数学教室談話会

## 《高温超伝導の電子メカニズム》

東大理学部 青木秀夫

### 要旨

酸化物高温超伝導体の理論は、舞台としては、電子の多体問題（強く相関した電子系）への収束をみせているが、具体的な超伝導メカニズムに対しては、多体問題の難しさの故に、今だに百家争鳴の渦中にある。それでも、強相関電子系のモデルであるハバード模型や、それに電子を付け加えたり取り去ったりしたドーピングされたハバード模型に対し、色々興味深いことが分かってきた。理論の現状は、実際の酸化物に即応して、銅および酸素の軌道を取り入れた模型（例えば2バンド・ハバード模型）における超伝導の研究、時間反転対称性が破れた状態やカイラリティが有限の状態が基底状態ではないかという提案、さらには、場の理論的な研究で、分数量子ホール効果におけるような分数統計粒子（エニオン）気体を考え、この基底状態が超流動とするようなファンシーな理論に至るまで多彩なスペクトルを提している。この様な精力的な理論的探索の一断面を、講演者自身の理論（および量子モンテ・カルロ計算）の結果も含めて、分かり易く紹介したい。

題名 Gauge orbit に対する平均曲率

講演者 前田 吉 昭 (慶応大学 理工学部)

対称性をもつ変分問題を幾何学的に理解しようという試みは、かなり古くから行われていた。特に、 $M$  が compact, Riemannian manifold,  $G$  が compact Lie group とし、 $G$  が  $M$  に isometry group とし  $G$  が  $M$  上  $G$  の作用を  $G$  の作用で不変なものとして考える。多くの場合、 $F$  の臨界点と、その点を通る  $G$ -orbit の極小性 ( $G$ -orbit volume 最小) が期待される。

この話は、 $U(1)$  に一般化して、 $G$  が  $M$  が無限次元の場合にもいって試みている。例として、接続空間  $\mathcal{C}$  を考える。今  $M$  は  $C^\infty$  compact manifold とし、 $G$  は compact Lie group ( $U(N) \sim O(N)$ ) とし、 $P$  は  $M$  上の  $G$ -principal bundle とする。 $G$  の表現  $\rho$  により、 $P$  に  $\rho$  による associated vector bundle  $E$  を考える。 $\mathcal{C}$  は  $E$  上の connection 全体の集合である。これは無限次元 (このとき affine space になる) のベクトル空間と見られる。これに  $G$  の作用を  $G$  が作用する。この作用は、 $\mathcal{C}$  に自然に  $L^2$  内積を  $G$  が作用する。このとき  $\mathcal{C}$  の点  $\nabla$  に対する  $G$ -orbit の軌跡  $\mathcal{G}_\nabla$  の "平均曲率" を考えよう。一方  $\mathcal{C}$  上には Yang-Mills 汎関数  $Y_M(\nabla) = \int_M |F^\nabla|^2 d\mu_g$  がある。ここで  $F^\nabla$  は  $\nabla$  の曲率テンソルである。この汎関数の臨界点  $\nabla$  は Yang-Mills 接続と呼ばれる。我々が知っているのは、この汎関数の臨界点  $\nabla$  は  $\mathcal{G}_\nabla$  の "平均曲率" と関係がある。

$\nabla$  が  $\mathcal{C}$  に irreducible とき、接続空間  $T_\nabla \mathcal{C}$  は  $(\ker \delta^\nabla) \oplus (\text{Im } d^\nabla)$  ( $d^\nabla$  は  $\nabla$  による外微分、 $\delta^\nabla$  は formal dual) に直交分解され、特に、 $T_\nabla \mathcal{G}_\nabla = \text{Im } d^\nabla$  と見られる。また、 $\nabla$  の irreducibility から  $T_\nabla \mathcal{G}_\nabla \cong \Omega^0(\mathcal{G}_\nabla)$  と見られる ( $\mathcal{G}_\nabla$  は  $E$  の endomorphism bundle)。一般に  $\mathcal{C}$  上のベクトル場  $X, Y$  に対して、変微分  $D_X Y(\nabla) = \frac{d}{dt} Y(\nabla + tX(\nabla))|_{t=0}$  と定義すると、 $\mathcal{C}$  上の metric connection を定める。今、 $\mathcal{G}_\nabla$  ( $\nabla \in \mathcal{C}$ ; irreducible) の  $\nabla$  に対する法ベクトル  $N$  を取り、 $N \in \mathcal{G}_\nabla$  の法ベクトル場  $N$  に対して、 $\mathcal{G}_\nabla$  の接ベクトル  $X$  への共変微分  $D_X N$  を考える。これは  $\mathcal{G}_\nabla$  の法ベクトル場  $N$  の導関数

$$A_N : T_\nabla \mathcal{G}_\nabla \rightarrow T_\nabla \mathcal{G}_\nabla, \quad A_N(X) = D_X N(\nabla)$$

が得られる。ここで  $T_\nabla \mathcal{G}_\nabla \cong \Omega^0(\mathcal{G}_\nabla)$  と見られると、 $\tilde{A}_N : \Omega^0(\mathcal{G}_\nabla) \rightarrow \Omega^0(\mathcal{G}_\nabla)$  と

線型写像が決る。  $\tilde{A}_N$  の曲面  $(g \in \mathfrak{g}, D)$  における  $\tau$  = 基本量 と考えられる。  $\Rightarrow$  a trace  
 としうる。 実際には、  $\tilde{A}_N$  の trace が取らる。  $L$  が  $L$  - 一般には、  $\tilde{A}_N$  は、  
 核関数  $A_N(x, y)$  がある。

$$A_N(x, y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} r^{-2\tau+2j-2} U_j^N(x, y) + \log r^2 V_0^N(x, y) + E_0^N(x, y)$$

$(U_j^N, V_0, E_0)$  は  $C^\infty$  内積 1 の形に書ける。  $\Rightarrow$   $U_j$  が満たす性質として

$$\text{tr } U_0^N(x, x) = \text{tr } U_1^N(x, x) = 0, \quad \text{tr } U_2^N(x, x) = \frac{-2n}{n-4} \langle \mathcal{E}^D = D, N \rangle_x$$

( $n$  は  $\tau$  の次元と関係している)。  $\text{tr } U_2^N(x, x) = \chi_m$  の臨界点と示す量  $\lambda$  である。

計算はより複雑だが、 compact

manifold 上の Riemann 計量全体と

微分同相の群、  $Bu$  スカラー曲率の汎関数に対しては同様の計算が知られている。 これは、

すでに試みられた計算だが、よりよい formulation を与えることは、 anomaly の説明を

与えるに役立つことかもしれない。

以上



# The structure of non isolated singularities of morphisms

Isao Nakai

Nagasaki Univ.

Map germs  $f, g: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$  are topologically equivalent if there exist germs of homeomorphisms  $\phi$  of  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $\psi$  of  $(\mathbb{C}^p, 0)$  such that  $g\phi = \psi f$  holds. When  $f$  has non isolated singularities along the fibre  $f^{-1}(0)$  the fibres  $f^{-1}(u)$  infinitesimally nearby  $f^{-1}(0)$  determine a rich geometric structure on  $f^{-1}(0)$ , the so-called generalised web structure. For such a structure the topological rigidity theorem for webs applies in some cases and says that topological type of  $f$  determine holomorphic type of the fibre  $f^{-1}(0)$  as well as the web on it. This phenomenon makes a remarkable contrast to the fact that functions  $f: \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$  with isolated singularities are topologically determined by their monodromy of vanishing cycles.

To explain the web structure for map germs, consider, for example, the pinching map  $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  defined by  $f(x, y, z) = (xz^3 + yz, x, y)$ . The map is linear with  $x, y, f^{-1}(0) = Z$ -axis, finite-to-one off  $f^{-1}(0)$ , and the preimages  $f^{-1}(C)$  of curves  $C$  (possibly singular) passing through the origin in the target are three-curves meeting  $f^{-1}(0)$  at three points. Those are depending only on the tangent direction  $v \in \mathbb{P}^2$  of  $C$  at the origin and denoted  $D_v$ . These  $D_v$  are all linearly equivalent as divisors and form a "linear system"  $L = \mathbb{P}^2$  of degree 3 and  $\dim 2$  on the fibre  $f^{-1}(0) = \mathbb{P}^1$  (For general pinching map we obtain subvariety  $W$  in a linear system). The geometry of this linear system is called the generalised web geometry of  $f$ .

The morphism  $\phi: f^{-1}(0) \rightarrow L^\vee$  (dual of  $L$ ) is defined by the

dual  $\varphi(z) = H_z^\vee$  of the projective line  $H_z = \{D_v \in L \mid x \in D_v\}$ , and conversely the image  $\varphi(f^{-1}(0)) \subset L^\vee$  generate the "foliation" by the dual lines  $H_z$  parametrised by  $z \in f^{-1}(0)$  on  $L$ , the so-called 3-web, for which topological equivalence implies holomorphic equivalence (provided the web is non-hexagonal) (the rigidity).

The structure above explained is interpreted to the following blow-up diagram with the centre  $f^{-1}(0)$  and the origin

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} : \mathbb{C}^3, f^{-1}(0) \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3, \mathbb{P}^2 = L \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ f : \mathbb{C}^3, f^{-1}(0) & \longrightarrow & \mathbb{C}^3, 0 \end{array}$$

where  $\tilde{f}$  is the strict transform of  $f$ . From the diagram we extract the divergent part

$$f^{-1}(0) \xleftarrow{\tilde{\pi}} f^{-1}(0) \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{P}^2 = L$$

from which we seek to detect the structure of the non isolated singularity of  $f$  concentrated at the fibre.

In a general divergent diagram  $\xleftarrow{f} \quad \xrightarrow{g}$  defines a double fibration (foliation)  $\mathcal{F}$  on the intermediate space and the direct images  $f_*\mathcal{F}$ ,  $g_*\mathcal{F}$  are defined sheaf-theoretically. The generalised web structure is nothing but the geometry of the direct images.

In the seminar talk, some relations of the web structure of mappings to the various geometries such as algebraic geometry, dynamical system, holomorphic group action on  $(\mathbb{C}, 0)$  etc will be also explained.

中井三留 (名古屋工大)

1. Royden コムパクト化の意味.  $N$ 次元 ( $N \geq 2$ ) Riemann多様体  $R$  上の関数  $u$  の  $p$ 次 ( $2 \leq p \leq N$ ) の Dirichlet 積分は

$$(1) \quad D_p(u) = \int_R |\nabla u|^p dv$$

で与えられる. これを変分とする Euler-Lagrange 方程式は

$$(2) \quad \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$$

である.  $R$  上の  $p$  次 Royden 代数  $M_p(R)$  とは ノルム  $\sup_R |u| + (D_p(u))^{1/p}$  が有限な  $u \in C^0(R)$  全体の完備化のことで, Banach 代数となる  $M_p(R)$  の極大イデアル空間として定まる  $R$  のコムパクト化を  $R$  の  $p$  次 Royden コムパクト化と呼んで  $(R)_p^*$  と記す. 次の結果が基本的である:

定理 1. 二つの Riemann 多様体  $R_1, R_2$  に対して,  $N > 2$  では  $p=2$  (又は  $N=2$  或は  $2 < p \leq N$ ) とするとき次の三条件は同等である:

- (a)  $R_1$  から  $R_2$  上への擬等距離 (擬等角) 写像が存在する;
- (b)  $M_p(R_1)$  と  $M_p(R_2)$  は代数的同型である;
- (c)  $(R_1)_p^*$  と  $(R_2)_p^*$  は同相である.

上の結果と (1) 及び (2) を合わせ考えると, 次のように言って良い, すなはち,  $R$  の擬等距離構造 (但し  $N > 2$  の時,  $N=2$  なら擬等角構造) は  $R$  上の線型ポテンシャル論 (古典ポテンシャル論) を, 又  $R$  の擬等角構造 (但し  $N > 2$  のとき) は  $R$  上の非線型ポテンシャル論を決定する. ここでは古典ポテンシャル論に興味を持つので  $p=2$  に限定する. よって以下では 2 次を省略して単に Dirichlet 積分

$$(3) \quad D(u) = \int_R |\nabla u|^2 dv = \int_R du \wedge *du = \|du\|^2,$$

Royden 代数  $M(R)$ , Royden コムパクト化  $R^*$  等と記す.

2. Royden 調和境界の連結性. Riemann 多様体  $R$  に対する Royden 代数  $M(R)$  の potential subalgebra  $M_\Delta(R)$  の各関数の共通零点として  $R$  の Royden 調和境界

$\Delta(R) \subset \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$  が定められる。ユークリッド空間  $E^N$  の  $N$  次元相対コンパクト部分多様体  $S$  の固有位相によるコンパクト化  $\bar{S}$  と  $S^*$  については、 $S^*$  から  $\bar{S}$  上への連続写像がある事以外関係は一般によく分からない。 $E^N$  の単位球を  $B^N$  と記すとき、うえの見地からして、次の結果は著しい：

定理 2.  $\Delta(B^2)$  は連結である。

此の結果は関数論的（二次限的）方法で得られているが、これを  $\Delta(B^N)$  ( $N > 2$ ) へ拡張することを考える。一般に  $\Delta(R)$  が連結となることは、 $R$  上の調和測度  $w$  で  $D(w) < \infty$  となるものは定数に限る事と一致する。そこで  $B^N$  を更に一般的に考察することにして、一般の Riemann 多様体  $R$  を考え、これが単位球的である事を、 $R$  の  $(N-1)$  次元 de Rham コホモロジー  $H^{N-1}(R) = \{0\}$  となることで考える事にする。

3. 条件  $AB(q)$ .  $R$  上の  $q$ -形式 ( $0 \leq q \leq N$ )  $\alpha$  に対してそのノルム

$$(4) \quad N[\alpha] = \sup \{ \|d\varphi \wedge \alpha\| / \|d\varphi\| : \varphi \in C_0^\infty(R) \setminus \{0\} \}$$

を導入する。 $0$ -形式  $\alpha$  に対しては  $N[\alpha] = \|\alpha\|_\infty$  (ess. sup ノルム) だから一般の  $q$ -形式  $\alpha$  に対しても  $N[\alpha] < \infty$  は  $\alpha$  のある種の有界性を意味する。 $R$  上のどんな  $(q-1)$ - $C^\infty$  形式  $\alpha$  で  $\|d\alpha\| < \infty$  となるものに対しても、 $N[\alpha_n] < \infty$  となる  $(q-1)$ - $C^\infty$  形式  $\alpha_n$  の列  $\{\alpha_n\}$  で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha - \alpha_n\| = 0$$

となるものが見つかるとき、 $R$  は条件  $AB(q)$  を満足するということにする。 $AB(1)$  は全ての  $R$  ( $N$  にかかわらず) について成立するが、それ以外は成立することもしないこともある。我々の主要な結果は次のものである：

定理 3.  $H^{N-1}(R) = \{0\}$  の時、 $R$  が  $AB(N-1)$  を満たせば、 $\Delta(R)$  は連結である。

特に、 $R$  が二次元ならば、 $H^1(R) = \{0\}$  なる限り  $\Delta(R)$  は連結となる。さて、上の結果に依れば、 $\Delta(B^N)$  ( $N \geq 2$ )、又は更に一般に、 $N=2$  なら任意の、 $N > 2$  なら一様楕円型の、Riemann 計量  $ds$  を与えたときの Riemann 多様体  $(B^N, ds)$  に対しての  $\Delta(B^N, ds)$  ( $N \geq 2$ )、は連結であることが分かる。勿論、 $\Delta(B^N, ds)$  ( $N > 2$ ) が連結とならぬ、従って  $AB(N-1)$  が満たされぬ、Riemann 計量  $ds$  が  $B^N$  上に存在する事も示される。

# t-design 構成の現状

(大阪教育大学) 鈴木 賢

DEF.  $V$ :  $v$ -element set

$\binom{V}{t}$ : the family of  $t$ -element subsets of  $V$

$0 \leq t \leq k \leq v$  integers  $\lambda = 1, 2, \dots$   $S(t, k, v)$

$\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \binom{V}{k}$ :  $S_\lambda(t, k, v)$  is a  $t$ -( $v, k, \lambda$ ) design

$\Leftrightarrow \lambda(\alpha) = \#\{B \in \mathcal{B} \mid \alpha \subset B\} = \lambda$  for  $\forall \alpha \in \binom{V}{t}$

$\mathcal{B}$ : nontrivial design  $\Leftrightarrow 0 < t < k < v, \mathcal{B} \neq \binom{V}{k}$

$t$ -design: nontrivial  $\Rightarrow t \leq k \leq v$  ( $t \geq 4$ )  $\lambda$  is small ( $\lambda \neq 1$ )

Theorem (L. Teirlinck: 1985) Discrete Math. 65, 1987, 301-311

$0 < k \leq v, \lambda$ : integers

Suppose  $(k!)^{2k-1} \mid \lambda, \lambda \mid v-k+1$ . let  $m = v-k+1/\lambda$

$\Rightarrow \binom{V}{k} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{B}_i$  (disjoint)

s.t.  $\mathcal{B}_i: S_\lambda(k-1, k, v)$

$t \geq 7$  の design は Teirlinck の 定理以外 知られていない  $\lambda \gg 1$

$t=6$  の design は " 有限個しか知られていない  $\lambda > 1$

$t=4, 5$  の design は いくつかの series 知られている

$\lambda=1$  のものは 有限個

Hanani Alltop

$t=3$  の design は たくさん知られている  $\lambda=1$  のものは いくつかの series 知られている

$t=2$  の " 存在の 必要十分条件 は 求めようとしている Wilson

## (Construction D geometrical)

Construction 1 幾何を使う方法

$G \leq S^V \cong S_v$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_e: \binom{V}{t}$  の  $G$ -orbits,  $\Delta_1, \dots, \Delta_f: \binom{V}{k}$  の  $G$ -orbits

$\mathcal{B} = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_f: S_\lambda(t, k, v)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^e A_{tk}[\Gamma_j, \Delta_i] = \lambda$  for  $\forall 1 \leq j \leq e$   $A_{tk}[\Gamma, \Delta] = \#\{\delta \in \Gamma \mid \delta \subset \Delta\}$

注  $e=1$  とすると automatical 161 nontrivial  $\Rightarrow t \leq 5$  1724  $t \leq 3$

$S=1$  とすると  $G$  は  $(\binom{V}{t})$  に trans.  $t \geq 11$  には 全く無理 がある  $t \geq 7$  には 無理

• Alltop's  $S_5(4, 5, 2^n+1)$  design, JCT 6, 1969, 320-322

$$q = 2^n, \quad n \geq 5 \quad (n, 2) = 1$$

$$\Omega = GF(q) \cup \{\infty\} \quad G = \left\{ \omega \mapsto \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \mid \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0 \right\}$$

$G$ : 3-transitive on  $\Omega$ .

$$\{\infty, 0, 1, \alpha, \alpha^2\}$$

$$\alpha \in \Omega^* = \Omega - \{\infty, 0, 1\}, \quad \text{let } \Delta(\alpha) = \{\infty, 0, 1, \alpha, \alpha+1\}$$

$$\mathcal{B} = \{ \Delta(\alpha)^\sigma \mid \sigma \in G, \alpha \in \Omega^* \}$$

とすると  $\mathcal{B}$  は  $(q-2)/6$  の orbit の union であり  $S_5(4, 5, 2^n+1)$  となる。

□ Alltop design: variation  $\lambda < 5$  について

$$\lambda < 5 \quad \text{とて} \quad v = 2^n + 1 \quad \text{とすると一般に}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{ B \cap \Omega - \{\infty, 0\} \mid B \in \mathcal{B}, B \supset \{\infty, 0\} \}$$

$$\text{とすると } \mathcal{B}_2 \text{ は } S_1(2, 3, 2^n-1) \cup S_1(2, 3, 2^n-1) \cup S_3(2, 3, 2^n-1)$$

$$\text{それぞれ } m \text{ は } \frac{1}{2}(2^n-1), \quad \frac{1}{2}(2^n-1), \quad \frac{1}{2}(2^n-1) \text{ である。}$$

$$\mathcal{B} \cong S_1(4, 5, 2^n+1) \cup S_1(4, 5, 2^n+1) \cup S_3(4, 5, 2^n+1)$$

$$S_1(3, 4, 2^n)$$

$$\text{Bierbrauer } S_\lambda(4, k, 2^n+1)$$

$$\text{とすると } k, \lambda \text{ について variation } \lambda < 5 \text{ について } \lambda > 5$$

Construction 2 (Orthogonal) array を使う方法

DEF.  $N$ :  $m$ -element set  $\Theta$ :  $q$ -element set

$$\Phi \neq \emptyset \subset \Theta^N = \{ f: N \rightarrow \Theta \} : OA(\lambda; m, n, q)$$

$$\Leftrightarrow \text{for } \forall \alpha \in \Theta^m \quad M \in \binom{N}{m}$$

$$\lambda(\alpha) = \# \{ f \in \Phi \mid f|_M = \alpha \} = \lambda$$

注.  $\lambda=1$  の場合が大切  $OA(m, n, q)$

$$|\Phi| = \lambda q^m$$

$$\mathcal{B} \ni f = \{ (f(x), x), x \in N \} \subset \binom{\Theta \times N}{m} \quad \text{とすると}$$

DEF.  $V = V(n, q)$  :  $n$  dimensional vector space over  $GF(q)$  with natural inner product.  
 $C$  : Subspace of  $V$   $[n, m, d; q]$  code ( $= V$ )

$\Leftrightarrow C$  :  $m$ -dim subspace of  $V$ .  
 $d = d(C) = \min \{ wt(c) \mid c \in C - \{0\} \}$   
 $wt(c) = \# \{ i \mid c_i \neq 0 \}$   $c = (c_1, \dots, c_n)$

$H = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-m} \end{pmatrix}$  : parity check matrix if  $\langle a_1, \dots, a_{n-m} \rangle = C^\perp$   
 $d$  : lin. dep. /  $H$  a column の 最小数.

$C$  : M.D.S (maximum distance separable) code

$$\Leftrightarrow d = n - m + 1$$

$\Leftrightarrow H$  の  $n-m$  列は 一次独立

$$\Leftrightarrow C : OA(1; m, n, q)$$

$$\Leftrightarrow C^\perp : OA(1; n-m, n, q)$$

( $\pm$  は  $C$  の linear subspace の場合)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & a & & a^{q-2} & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a^{q-m+1} & & a^{(q-2)(q-m+1)} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \langle a \rangle = GF(q)^*$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & a & \dots & a^{q-2} & 0 & 1 & 0 \\ & a^2 & \dots & a^{2(q-2)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad q = 2^t$$

$$RS, RS^\perp, RS^2, RS^3$$

$$M(m, q) = \max_m [n, m, n-m+1; q]$$

Conjecture :  $M(m, q) = \begin{cases} q+1 & 2 \leq m \leq q \\ m+1 & q < m \end{cases}$

except for  $M(3, q) = M(q-1, q) = q+2$  if  $q = 2^5$

\* True for  $m \leq 5, q \leq 11$ , or  $q > (4m-9)^2$

Theorem : (NacNish)

$$r = \prod q_j \quad q_j : \text{powers of distinct primes}$$

$$\Rightarrow \exists OA(1; m, n, r) \quad n = 1 + \max(m, \min q_j)$$

$$\textcircled{1} S(2, g, g^2)$$

$$\textcircled{B}: OA(2, g, g) : RS^1 \quad g: \text{prime power の 冪}$$

$$\textcircled{B} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad \textcircled{B}' = \{ \mathbb{Q} \times \{a\} \mid a \in \mathbb{Q} \}$$

$$\textcircled{B} \cup \textcircled{B}' = \tilde{\textcircled{B}} : S(2, g, g^2)$$

$$(\because (x, a), (y, b) \quad a \neq b \rightarrow M = \{a, b\} \quad \mathbb{Q}^{M, \bar{x}})$$

$$a = b$$

$$\text{実は 2 の場合は } \exists S(2, k, k^2) \Leftrightarrow \exists OA(2, k, k)$$

$$\textcircled{2} S(2, g+1, g^2+g+1)$$

$$\textcircled{B} \subset \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \quad OA(2, g+1, g) : RS^2 \quad V = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \cup \{x\})$$

$$\textcircled{B}' = \{ \mathbb{Q} \times \{a\} \cup \{x\} \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$\textcircled{B} \cup \textcircled{B}' = \tilde{\textcircled{B}} : S(2, g+1, g^2+g+1)$$

$$\textcircled{3} S(2, k, v) \Rightarrow S(2, k, (k-1)v+1)$$

$$OA(2, k, k-1)$$

$$\textcircled{4} \left. \begin{array}{l} S(3, k+1, v+1) \\ S(3, k+1, k^2+1) \\ OA(3, k+1, k) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists S(3, k+1, kv+1)$$

$k$ : prime power ?

$$\textcircled{5} S(3, k, v+1) \Rightarrow \exists S(3, k, (k-2)v+2)$$

$$OA(3, k, k-2)$$

$$k \mid 12 \quad k = 4, 6, 12$$

$$\left( \begin{array}{l} S(3, 4, 2^n) \\ S(3, 4, 8) \Rightarrow S(3, 4, 2^{n+1}) \\ OA(3, 4, 2) \end{array} \right)$$

Q. 一般の  $k$  について この型の construction ができるか.

Construction 3. Extension Theorem.

Theorem (Altop) JCT(A)12, 1972

$$\exists S_\lambda(t, k, 2k+1) \Rightarrow \exists S_\lambda(t+1, k+1, 2k+2)$$

if  $t$  is even.

Q. この型の定理を generalize せよ.



弾性体  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  の微小な振動を考え、各点  $x$  の時刻  $t$  における変位ベクトルを  $u(t, x) = {}^t(u_1, \dots, u_n)$  とすると、 $u(t, x)$  は次のような形の方程式をみたす。

$$(\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}) u(t, x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \Omega.$$

ここで  $a_{ij} = (a_{ipjq})$  は  $n \times n$  行列であり、詳しい仮定は以下で述べる。最も典型的な例は次の等方性の場合である。

$$\left[ \partial_t^2 - \left\{ \mu \Delta + (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} & \partial_{x_1} & \cdots & \partial_{x_1} & \partial_{x_n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_{x_n} & \partial_{x_1} & \cdots & \partial_{x_n} & \partial_{x_n} \end{pmatrix} \right\} \right] u(t, x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times \Omega.$$

さらに Neumann または Dirichlet 型の境界条件を課する。 $\Omega$  を外部領域とし、上の混合問題に対して次のことを試みる。

- (i) 解の存在と一意性を示すこと。
- (ii) Lax-Phillips 流 ([2]) の散乱論を構成すること。
- (iii) 散乱核  $S(s, \theta, \omega)$  に対して Majda [3] (Soga [5]) のような表現式を得ること。
- (iv)  $S(s, \theta, \omega)$  の特異点に関して Majda [3] に対応する結果を得ること。

(i) について。次の条件 (A.1), (A.2) を仮定すると、ある適当な初期値の空間において解の存在と一意性が示せる (Shibata-Soga [4])。

$$(A.1) \quad a_{ipjq} = a_{pijq} = a_{jqip}, \quad i, j, p, q = 1, \dots, n.$$

$$(A.2) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ipjq} \epsilon_{jq} \bar{\epsilon}_{ip} \geq \delta \sum_{i,p=1}^n |\epsilon_{ip}|^2 \quad \text{for any Hermitian matrices } (\epsilon_{ij}).$$

(ii) について。 (A.1), (A.2) に加えて以下の (A.3) を仮定すると、波動作用素の完全性、初期値の translation 表現等が得られる (Shibata-Soga [4])。

$$(A.3) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \text{ has eigenvalues of constant multiplicity.}$$

(iii) について。  $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j$  の固有値を  $\lambda_1(\xi) < \cdots < \lambda_d(\xi)$  とする。 $\lambda_i(\xi)$  の固有空間への projection を  $P_i(\xi)$  とする。(A.1) ~ (A.3) と

$$(A.4) \quad \text{Every slowness surface } \{\xi: \lambda_i(\xi) = 1\} \text{ is strictly convex.}$$

のもとで次のような Majda [3] に相当する散乱核の表現式が得られる (Soga [6, 9])。

$$S(s, \theta, \omega) = \sum_{i,j=1}^d \lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{4}} \int_{\partial\Omega} P_i(\theta) (\partial_t^{n-2} N_{V_j}) (\lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{2}} \theta \cdot x - s, x; \omega) - \lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot P_i(\theta)(Nx \cdot \theta)(\partial_t^{n-1} v_j)(\lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{2}} \theta \cdot x - s, x; \omega) \} dS_x \quad (\omega \neq \theta).$$

ここで、 $N = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{x_j}$  ( $(v_1, \dots, v_n)$  は  $\partial\Omega$  の単位外法ベクトル)、 $v_j$  は平面波  $-2^{-1}(-2\pi i)^{1-n} \lambda_j(\omega)^{-\frac{1}{2}} \delta(t - \lambda_j(\omega)^{-\frac{1}{2}} \omega \cdot x) P_j(\omega)$  を入射させたときの反射波を表す。

(iv)について。上の表現式を使って、 $S(s, \theta, \omega)$  の  $s$  に関する support などを調べる。任意の  $\omega \in S^{n-1}$  に対して次のことが成立する (Soga [7, 9])。

$$(a) \text{ supp}[P_i(-\omega)S(s, -\omega, \omega)P_j(\omega)] \subset (-\infty, r_{ij}(\omega)], \quad i, j = 1, \dots, d.$$

$$(b) P_i(-\omega)S(s, -\omega, \omega)P_i(\omega) \text{ is not } C^\infty \text{ at } s = r_{ii}(\omega).$$

ここで  $r_{ij}(\omega) = -(\lambda_i(-\omega)^{-\frac{1}{2}} + \lambda_j(\omega)^{\frac{1}{2}}) \min_{x \in \partial\Omega} x \cdot \omega$  である。山本氏 [10] は、等方性で Dirichlet 境界条件のもとで同種の問題を考察している。

$s = r_{ij}(\omega)$  ( $i \neq j$ ) が  $P_i(-\omega)S(s, -\omega, \omega)P_j(\omega)$  の特異点であるか否かは、以下に示すように非常にデリケートな問題である。以後、 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\partial_t^2 - \sum \partial_{x_i} \partial_{x_j}$  は等方性とし、境界条件は Dirichlet とする。等方性のときは  $\{\lambda_i(\xi)\} = \{|\mu|\xi|^2, (\lambda+2\mu)|\xi|^2\}$  ( $d=2$ ) となることに注意しよう。これからの結果は川下美潮氏 (高知大理) との共同のものである ([1])。

(c)  $\partial\Omega$  の平均曲率を  $H$  で表し、 $\theta \in S^2$  を  $\omega$  に垂直なベクトルとする。  $\{x \in \partial\Omega; \min_{y \in \partial\Omega} y \cdot \omega\}$  上で  $\partial H / \partial \theta > 0$  (又は  $< 0$ ) ならば  ${}^t P_1(-\omega)S(s, -\omega, \omega)P_2(\omega)$  は  $s = r_{12}(\omega)$  において  $C^\infty$  でない。

(d)  $\theta \in S^2$  を  $\omega$  に垂直なベクトルとする。  $\{x \in \partial\Omega; x \cdot \omega < \min_{y \in \partial\Omega} y \cdot \omega + \varepsilon\}$  ( $\varepsilon > 0$ ) が有限個の部分に分かれ、各部分が  $\theta$  に垂直な平面に関して対称であるとする。このとき  $s = r_{12}(\omega)$  の近傍で  ${}^t P_1(-\omega)S(s, -\omega, \omega)P_2(\omega) = 0$  となる。

- [1] M. Kawashita and H. Soga: Mode-conversion of the scattering kernel for the elastic wave equation, to appear.
- [2] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory. Academic Press, New York (1967).
- [3] A. Majda: A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies. Comm. Pure Appl. Math. 30, 165-194 (1977).
- [4] Y. Shibata and H. Soga: Scattering theory for the elastic wave equation, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.
- [5] H. Soga: Singularities of the scattering kernel for convex obstacles. J. Math. Kyoto Univ. 22, 729-765 (1983).
- [6] H. Soga: On the representation of the scattering kernel for elastic wave equation. Proc. Japan Acad. 64 Ser. A (1988), 65-67.
- [7] H. Soga: Asymptotic solutions of the elastic wave equation and their applications. Bull. Fac. Educ. Ibaraki Univ. 37 (1989).
- [8] H. Soga: Asymptotic solutions of the elastic wave equation and Reflected waves near boundaries, to appear.
- [9] H. Soga: Representation of the scattering kernel for the elastic wave equation and singular support of its kernel, in preparation.
- [10] K. Yamamoto: The behavior of scattered plane waves of elastic wave equations and applications to scattering theory, to appear in J. London Math. Soc.

以下 $R$ は単位元をもつ環  $J$  をその根基とする。

$$\bar{R} = R/J = \sum \oplus \bar{e}_{ij}' R$$

より $R$ のべき等元  $e_{ij}$  で

$$R = \sum \oplus e_{ij} R, \quad \bar{e}_{ij}' = \bar{e}_{ij}'$$

となる $e_{ij}$ をlifting idempotentという。この概念を拡張して LPSM (lifting property of simple modules modulo radical)を1982年に導入した。これを大城によってlifting moduleという新しい概念へ拡張された(1983年)。これはdual continuous moduleとして広く研究されたmoduleの重要な性質の1つである。

このlifting module を別の方向から研究する方法を考察しているうちに 次の様な $M$ -projective(東屋 1972年)の概念を拡張したalmost  $M$ -projectiveと同値の性質であることが分った。

$N, M$ を $R$ -modulesとして 任意のdiagram

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & & \downarrow \hat{h} & & \\ M & \xrightarrow{\quad \vee \quad} & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して

- 1)  $\hat{h}: N \rightarrow M$ で  $\vee \hat{h} = h$ となるものが存在するか
- 2)  $M$ のnon-zero direct summand  $M_1$  で  $\hat{h}: M_1 \rightarrow M$ で  $h\hat{h} = \vee|_{M_1}$ と成る物が存在する。

この時  $N$ をalmost  $M$ -projectiveという。(1)のみの時が  $M$ -projectiveである)。ここで  $M$ がlocal module  $eR/A$ でなければ almost  $M$ -projective は常に $M$ -projectiveとなる。このことよりalmost  $M$ -projectiveと $M$ -projectiveとの相違はlocal module の時に現れる。

$M$ が $M_1$ -projective,  $M_2$ -projectiveであれば $M$ は常に $M_1 \oplus M_2$ -projectiveであるが(東屋) almost  $M_2$ -projectiveでは  $M_1 \oplus M_2$ がLPSMを持つ時に限り $M$ が $M_1 \oplus M_2$ -projectiveになる。さらに $M_1 \oplus M_2$ がLPSMをもつことは  $R$ が中山環と同値になる。この様にして $M$ -projectiveのもつ性質がalmost  $M$ -projectiveにも保証される環の特徴として中山環を研究するのが目的である。

次の様な性質は中山環に深く関わる

- 1) local modulesは互にalmost relative projectiveである
- 2) local modules  $eR/A$  がalmost  $eR/B$ -projectiveである( $e$ は原始べき

等元を互)。

3) almost relative projectivityが直和に関して閉じている。

4)  $M_0$ がalmost  $M_1$ -projective, not  $M_1$ -projectiveであるとする。 $M_0$ が $M_2$ -projectiveであれば $M_1$ は常に $M_2$ -projectiveであるが、 $M_1$ がalmost  $M_2$ -projectiveでは一般に $M_1$ がalmost  $M_2$ -projectiveにならない。この事が保証されている。

上において  $M_i$  等をlocal modulesに制限するか否かで環が変わってくる。

# On the cohomology of arithmetic groups - W. Casselman

Let

$G$  = real points on a reductive group defined over  $\mathbb{Q}$

$\Gamma$  = an arithmetic subgroup

$X$  = the associated symmetric space  $\cong G/K$  if

$K$  = a maximal compact subgroup of  $G$

The cohomology of the group  $\Gamma = H^*(\Gamma, \mathbb{C})$  is the same as that of the manifold  $\Gamma \backslash X$  since  $X$  is contractible. Since  $\Gamma \backslash G \rightarrow \Gamma \backslash X$  with fibre  $K$  is a principal bundle to which the tangent bundle is associated, it also turns out to be the Koszul relative Lie algebra cohomology  $H^*(\mathfrak{g}, K, C^\infty(\Gamma \backslash G))$  (where  $\mathfrak{g}$  = Lie algebra of  $G$ ), the cohomology of the Koszul complex

$$\text{Hom}_K(\wedge^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C^\infty(\Gamma \backslash G)).$$

If  $\Gamma \backslash G$  is compact, then the space  $C^\infty(\Gamma \backslash G)$  may be written as a direct sum  $C_0^\infty(\Gamma \backslash G) \oplus$  a complement, where  $C_0^\infty(\Gamma \backslash G)$  = the space of functions  $f$  on  $\Gamma \backslash G$  such that  $Xf = 0$  for every  $X \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$  ~~such that~~ is the augmentation ideal<sup>max</sup>, and as a generalization of Hodge theory one knows that the  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomology of  $C^\infty(\Gamma \backslash G)$  is isomorphic to  $\text{Hom}_K(\wedge^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C_0^\infty(\Gamma \backslash G))$  which is also  $\sum_i \text{Hom}_K(\wedge^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi)$  if  $C_0^\infty \cong \bigoplus \pi$  is a decomposition into irreducible  $\mathfrak{g}$ -representations. The possible  $\pi$  occurring have been classified by Parthasarathy, Kumar, Vogan, Zuckerman (after lots of work by others)

If  $P/G$  is not compact, any description of the cohomology in detail must take into account the continuous spectrum of  $P/G$ , the automorphic forms generated by Eisenstein series. The replacement for Hodge theory is a conjecture of Borel that the cohomology of  $C^\infty(P/G)$  is the same as that of the subspace  $\bigoplus_{\mathbb{Q}} A_0(P/G)$  of automorphic forms annihilated by some power of  $m_\infty$ . This is perhaps very close to being proven for all groups  $P$ . As a consequence one obtains a filtration of  $H^*(P \backslash X)$  indexed by  $\mathbb{Q}$ -components of the Satake compactification of  $P \backslash X$ ; the cohomology of each associated graded complex is calculated in terms of Harish-Chandra tempered forms on the boundary component.

# 分岐図式の位相型に対する代数的公式

西村尚史 (横浜国大・教養)

特異点論の分岐問題への一つの応用を与える。

ワンプラメータ付の  $C^\infty$  写像  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  の零点集合  $f^{-1}(0)$  (分岐図式と呼ばれる) を考える。  $f(0,0)=0$  を仮定しておき,  $\Gamma$  を  $(0,0)$  の十分小さな近傍とすると, 一般には,  $f^{-1}(0) \cap \Gamma - \{(0,0)\}$  は空集合もしくは何本かの smooth connected curve の和集合となる。

$$b_+(f) = \# [\text{connected component of } f^{-1}(0) \cap \Gamma \text{ which lies in the half region } \lambda > 0]$$
$$b_-(f) = \# [\text{connected component of } f^{-1}(0) \cap \Gamma \text{ which lies in the half region } \lambda < 0]$$

とおく。ここに,  $\lambda$  はパラメータである。  $b_+(f)$ ,  $b_-(f)$  が  $f^{-1}(0)$  の原点  $(0,0)$  での局所位相型を決定することは明らかである。  $b_+(f)$ ,  $b_-(f)$  を  $f$  から計算できるようにすることが目標である。

local な話なので,  $C^\infty$  map germ  $f = (f_1, \dots, f_n): (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  を考えればよいが, さらに, 逆関数定理が通用しない場合のみを考えれば十分なので,

$$Jf(0,0) = \det \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0) \right]_{1 \leq i,j \leq n} = 0$$

を仮定しておく。さて,  $C^\infty$  map germ  $f$  から作られる2つの  $C^\infty$  map germs

$$(f, Jf): (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0))$$

$$(f, \lambda Jf): (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0))$$

と, これらの local algebras  $Q(f, Jf)$  &  $Q(f, \lambda Jf)$  を考える。  
 $\dim_{\mathbb{R}} Q(f, Jf) \leq \dim_{\mathbb{R}} Q(f, \lambda Jf)$  はすぐわかる。

$g = (f, \lambda Jf)$  又は  $(f, Jf) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0))$  とすると,  
 (中山の補題より)  $\dim_{\mathbb{R}} Q(g) < \infty$  ならば  $g^{-1}(0) = \{0\}$

となるので, この場合は  $g$  の写像度  $\deg(g)$  が定義できる。これが我々の主張である。

定理.  $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$   $C^\infty$  map germ with  
 $\dim_{\mathbb{R}} Q(f, \lambda Jf) < \infty$  とする。このとき,

$$b_+(f) + b_-(f) = 2 \deg(f, \lambda Jf)$$

$$b_+(f) - b_-(f) = 2 \deg(f, Jf)$$

この定理の条件  $\dim_{\mathbb{R}} Q(f, \lambda Jf) < \infty$  は  $C^\infty$  map germ  
 $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  に対する generic な条件であることも証明される。  
 $C^\infty$  map germ の写像度の代数的公式を与えた Eisenbud-Levine の定理  
 (Ann. of Math., 106 (1977), 19-38) とこの定理を結びつければ,  $b_+(f)$   
 や  $b_-(f)$  の代数的公式が得られる。

以上は, 福田拓生氏 (東工大・理), 青木憲二氏 (専修大・経営) との共同研究である。

文献. T. Nishimura, T. Fukuda & K. Aoki: An algebraic formula for  
 the topological types of one parameter bifurcation diagrams,  
 Archive for Rational Mechanics and Analysis, 108 (1989), 247-265.



## シンプレクティック構造についての1つの話題

大阪大・教養・大和健二

$(M, \omega)$  をシンプレクティック多様体とする。この  $\omega$  に対し、リーマン計量  $g$  と概複素構造  $J$  で

$$(*) \quad \forall X, Y \in TM \quad g(X, Y) = g(JX, JY)$$

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

となるものが存在する。  $\omega$  に対して、上の  $(*)$  をみたす  $(g, J)$  で  $J$  が積分可能なものが存在する時、 $\omega$  は Kählerian という事とする。

よく知られているように、 $\omega$  は局所的にはいつも標準的な Kählerian シンプレクティック構造  $\sum dx_i \wedge dy_i$  と同型である。何らかの不変量により、2つのシンプレクティック構造が、大域的に、同型で有り事を見てみたい。

さて、シンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  に対し、 $H^1(M, \mathbb{R})$  の部分集合に値をとるシンプレクティック微分同相に関する不変量  $\Gamma_\omega, \hat{\Gamma}_{[\omega]}$  ( $\Gamma_\omega < \hat{\Gamma}_{[\omega]}$  である) が Banyaga - Urwin により定義された。前者  $\Gamma_\omega$  は  $\omega$  によりのみ依存し、 $\hat{\Gamma}_{[\omega]}$  は  $\omega$  の「ホモロジー類」 $[\omega]$  により決まる不変量である。これについて、殆んど判っていませんが、Banyaga の問題として

$$(1) \quad \text{いつも } \Gamma_\omega = \hat{\Gamma}_{[\omega]} \text{ か?}$$

(2)  $\omega$  が Kählerian の時,  $\Gamma_\omega$  は discrete set という事は判っているが, 117 も  $\Gamma_\omega$  は discrete set か? これらには興味があります。

ここでは, (2) について, せめて non-Kählerian な シンプレクティック構造の 117 いくつかの例とその判定法について, 話たいと思います。

## Quasilinear Reaction–Diffusion Systems

Herbert Amann

We discuss a variety of examples of reaction–diffusion systems, which are all taken from various fields of applications. The common feature of these examples is that they all involve systems of parabolic differential equations, which are either strongly coupled or highly degenerate. We indicate how these examples can be considered as concrete realizations of abstract differential equations of the form

$$\dot{u} + A(u)u = f(u) \tag{*}$$

in suitable Banach spaces. Finally we indicate the difficulties in solving (\*) and the techniques which are used to overcome these difficulties.

## On Tests for Stability.

*R. Rautmann*

For quasimonoton increasing  $C^1$ -vectorfunctions  $f$  in  $\mathbb{R}^n$  (and even for more general functions) the local asymptotic stability of a critical point  $x^*$  of

$$(*) \quad \frac{d}{dt} x = f(x)$$

can be checked by an  $O(n^3)$ -step calculation, if we use that a real  $Z$ -matrix is positively stable if and only if it is of monotone type.

In the case of a Lipschitz-continuous quasimonotone increasing vectorfunction  $f$  on  $\mathbb{R}^n$ , the flow-invariance with respect to  $(*)$  of axes-parallel closed rectangles  $[a^-, a^+] \subset \mathbb{R}^n$  is equivalent to  $0 \leq f(a^-)$  and  $f(a^+) \leq 0$ .

For a continuous quasimonoton increasing vectorfunktion  $f$  on  $\mathbb{R}^n$ , the global asymptotic stability of a critical point  $x^*$  of  $(*)$  follows from the sufficient condition that  $x^*$  is situated on a  $C^1$ -curve  $X(s) \in \mathbb{R}^n$ , which (in the componentwise ordering of  $\mathbb{R}^n$ ) is strictly increasing from  $-\infty$  to  $\infty$  and on which

$$0 < f(X(s)) \text{ for } X(s) < x^*, \text{ and } f(X(s)) < 0 \text{ for } x^* < X(s)$$

holds. By the well-known comparison theorems, these results also apply to weakly coupled quasimonoton increasing parabolic systems.